

Série A, n° 2776
N° d'ordre : 3649

THÈSES

présentées

à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris
pour obtenir le grade de Docteur es Sciences Mathématiques

par

Raymond RAFFIN

Agrégé de l'Université

1^{re} THÈSE : Propriétés de commutation et de finitude des anneaux non associatifs.
Généralisations des corps gauches.

2^{me} THÈSE : La différentielle absolue dans un espace de Riemann.

Soutenues le 30 Mai 1951 devant la Commission d'Examen

Président :

A. CHATELET

Examineurs :

P. DUBREIL

A. LICHNEROWICZ

1951



Digitized by the Internet Archive
in 2026

FACULTE DES SCIENCES

THESES

Nom du Candidat : RAFFIN.

Prénoms : Raymond.

Date de la soutenance : 30 Mai 1951.

Numéro d'ordre : Série A 2776 - N° 3649.

RAFFIN (Raymond). — Propriétés de commutation et de finitude des anneaux non associatifs. Généralisations des corps gauches. — Dakar, Grande Imprimerie Africaine, 1955. In-4°, 120 pages, 3 figures.

(Th. Sc. Math. Paris, 1951, Série A, 2776. n° 3649.)

RAFFIN (Raymond). — Propriétés de commutation et de finitude des anneaux non associatifs. Généralisations des corps gauches. — Dakar, Grande Imprimerie Africaine, 1955. In-4°, 120 pages, 3 figures.

(Th. Sc. Math. Paris, 1951, Série A, 2776. n° 3649.)

RAFFIN (Raymond). — Propriétés de commutation et de finitude des anneaux non associatifs. Généralisations des corps gauches. — Dakar, Grande Imprimerie Africaine, 1955. In-4°, 120 pages, 3 figures.

(Th. Sc. Math. Paris, 1951, Série A, 2776. n° 3649.)

RAFFIN (Raymond). — Propriétés de commutation et de finitude des anneaux non associatifs. Généralisations des corps gauches. — Dakar, Grande Imprimerie Africaine, 1955. In-4°, 120 pages, 3 figures.

(Th. Sc. Math. Paris, 1951, Série A, 2776. n° 3649.)

Examineurs :
D. DUBREUIL
A. LICHNEROWICZ

Nom du Candidat : RAFFIN.

Prénoms : Raymond.

Date de la soutenance : 30 Mai 1951.

Numéro d'ordre : Série A 2776 - N° 3649.

RAFFIN (Raymond). — Pro-
priétés de commutation et de fini-
tude des anneaux non associatifs.
Généralisations des corps gauches. —
Dakar, Grande Imprimerie Africaine,
1955. In-4°, 120 pages, 3 figures.
(Th. Sc. Math. Paris, 1951, Série A,
2776. n° 3649.)

RAFFIN (Raymond). — Pro-
priétés de commutation et de fini-
tude des anneaux non associatifs.
Généralisations des corps gauches. —
Dakar, Grande Imprimerie Africaine,
1955. In-4°, 120 pages, 3 figures.
(Th. Sc. Math. Paris, 1951, Série A,
2776. n° 3649.)

RAFFIN (Raymond). — Pro-
priétés de commutation et de fini-
tude des anneaux non associatifs.
Généralisations des corps gauches. —
Dakar, Grande Imprimerie Africaine,
1955. In-4°, 120 pages, 3 figures.
(Th. Sc. Math. Paris, 1951, Série A,
2776. n° 3649.)

RAFFIN (Raymond). — Pro-
priétés de commutation et de fini-
tude des anneaux non associatifs.
Généralisations des corps gauches. —
Dakar, Grande Imprimerie Africaine,
1955. In-4°, 120 pages, 3 figures.
(Th. Sc. Math. Paris, 1951, Série A,
2776. n° 3649.)

ie A, n° 2776
d'ordre : 3649

THESES

présentées

à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris
pour obtenir le grade de Docteur es Sciences Mathématiques

par

Raymond RAFFIN

Agrégé de l'Université

THÈSE : Propriétés de commutation et de finitude des anneaux non associatifs.
Généralisations des corps gauches.

THÈSE : La différentielle absolue dans un espace de Riemann.

Soutenues le 30 Mai 1951 devant la Commission d'Examen

Président :

A. CHATELET

Examineurs :

P. DUBREIL

A. LICHNEROWICZ



A MA MÈRE

A MA FEMME

E R R A T A

- p. 28. Équation (N), *lire* : $E_i = \sum_j r_j E_j$.
- p. 29. Équation (S'_p), *lire* : $(s = 1, \dots, p^k)$.
- p. 56. Ligne 18, *lire* : le coefficient $C_{p_1, p_2, \dots, p_n}$ du produit $(\dots(x_1^{p_1} x_2^{p_2}) \dots) x_n^{p_n}$.
Ligne 28, au second membre de l'équation *lire* : δ_{x_n} .
- p. 60. Équation (6), le second membre est : $\sum_i \beta_i \bar{\xi}_i \bar{\eta}_i$.
- p. 61. Deuxième ligne du Théorème 21, *au lieu de* : les indi ce , *lire* : les indices
Troisième ligne avant la fin *lire* : $e_2 = -\beta_1^{-1} \gamma_{21} e_1 + a_2$.
- p. 62. Au premier membre de la dernière équation (11) *lire* : y_3^3 .
- p. 63. Ligne 10 (dernière ligne CHAPITRE V) *lire* : $\delta_{y_1, y_1}^2 \delta_{z_2, z_2}$.
- p. 76. Ligne au dessous de la TABLE IX, *au lieu de* unique , *lire* : unique .
- p. 86. Ligne I7, *lire* : $v \neq 0$.
- p. 88. Cinquième ligne après la TABLE XIII, *lire* : $\xi_1 \xi'_2 - \xi'_1 \xi_2 = 0$.
- p. 96. Deuxième ligne après la formule (4), *au lieu de* : $(i = 0' 1, 2 \dots)$
lire : $(i = 0, 1, 2, \dots)$.
- p. 106. Ligne 5, *au lieu de* : sont , *lire* : son .
- p. 109. Ligne 5, *au lieu de* : $\xi_3 = 0$, *lire* : $\xi'_3 = 0$.
-

PREMIÈRE THÈSE

PROPRIÉTÉS DE COMMUTATION ET DE FINITUDE
DES ANNEAUX NON ASSOCIATIFS.
GÉNÉRALISATIONS DES CORPS GAUCHES

TABLE DES MATIÈRES

<i>Introduction.</i>	§	Pages
<i>Définitions générales</i>	1	13
 <i>PREMIÈRE PARTIE. — Etude de certaines propriétés de commutation des anneaux non associatifs.</i>		
<i>Chapitre I. — Propriétés générales des anneaux monogènes</i>	5	15
<i>Chapitre II. — Anneaux flexibles et à puissances flexibles</i>	12	18
<i>Chapitre III. — Propriétés de commutation des anneaux monogènes..</i>	15	21
A. — Identités générales et linéarisations	15	21
B. — Partitions commutatives complètes	22	25
C. — Applications	25	26
 <i>DEUXIÈME PARTIE. — Algèbre de degrés finis.</i>		
<i>Chapitre IV. — Introduction de divers types d'algèbres</i>	39	47
A. — Equations satisfaites par un élément d'une algèbre admettant une base finie	39	47
B. — Algèbres algébriques	43	51
C. — Généralisations	44	51
<i>Chapitre V. — Propriétés générales</i>	48	54
A. — Propriétés se déduisant directement d'une équation du $n^{\text{ème}}$ degré	48	54
B. — Linéarisation	50	55
<i>Chapitre VI. — Applications</i>	55	63
 <i>TROISIÈME PARTIE. — Propriétés d'inversibilité des anneaux non associatifs.</i>		
<i>SECTION I. — Etude générale de l'inversibilité d'un élément.</i>		
<i>Définitions et notations</i>	65	71
<i>Chapitre VII. — Inversibilité dans les anneaux associatifs et alternatifs</i>	68	72
A. — Anneaux associatifs	68	72
B. — Anneaux alternatifs	72	74
<i>Chapitre VIII. — Inversibilité dans les anneaux non alternatifs</i>	74	75
<i>Chapitre IX. — Inversibilité dans les anneaux à puissances principales uniques</i>	78	78
<i>Chapitre X. — Puissances négatives</i>	80	80

SECTION II. — Etude des algèbres symétriques.	§	Pages
<i>Chapitre XI.</i> — Propriétés générales. Première classification	90	85
A. — Algèbres symétriques générales	90	85
B. — Algèbres monosymétriques et algèbres symétriques à division	96	87
<i>Chapitre XII.</i> — Deuxième classification des algèbres symétriques	104	91
A. — Algèbres proprement symétriques. Algèbres absolument symé- triques	104	91
B. — Relations entre la monosymétrie, la symétrie propre et la symé- trie absolue	108	93
<i>Chapitre XIII.</i> — Expressions analytiques des conditions de symétrie et de monosymétrie	111	95
<i>Chapitre XIV.</i> — Algèbres symétriques du second degré	117	98
<i>Chapitre XV.</i> — Algèbres symétriques d'ordres deux, trois et quatre ...	125	102
<i>Problèmes non résolus.</i>		113
<i>Table des définitions et signes principaux employés.</i>		115
<i>Bibliographie.</i>		117
<i>Correspondance entre les numéros des pages et les numéros des paragraphes</i>		119

INTRODUCTION

Les nombres en gras entre accolades renvoient à la bibliographie placée à la fin de ce travail.

Réputées ingrates, les théories non associatives ont, en fait, peu évolué depuis GRAVES et CAYLEY jusqu'à ce que leur étude se justifie, tant par la « perfection » (DICKSON, 1935 {15}) de la théorie des algèbres associatives, que par les applications des algèbres non associatives à la théorie des quanta (1934 {22} puis {1}) et à la génétique (1939 {18} puis {27}).

Parmi les nombreux travaux parus depuis ces quelques années sur ce sujet, c'est le mémoire d'ALBERT sur *les anneaux à puissances associatives* ⁽¹⁾ (1948 {7}) qui est l'introduction essentielle de la Première Partie de cette thèse. Si l'anneau engendré par un élément x est associatif, il est évidemment commutatif. La réciproque n'est pas vraie. En outre la classe des anneaux à puissances associatives est trop restreinte ⁽²⁾. Ces faits m'ont incité à étudier des propriétés de commutation des anneaux non associatifs et en particulier des anneaux monogènes (c'est-à-dire engendrés par un seul élément). Je montre (Chapitre II) que dans un anneau flexible ⁽³⁾ de caractéristique première à 2, le sous-anneau engendré par n éléments qui commutent entre eux, est commutatif ; il en résulte qu'un tel anneau est à *puissances commutatives* (c'est-à-dire tel que tout sous-anneau monogène soit commutatif). Cependant, alors que les conditions d'associativité des puissances, du moins dans le cas des anneaux de caractéristique nulle, peuvent s'exprimer par des conditions très simples ⁽⁴⁾ ne faisant intervenir que l'élément (arbitraire) x , il n'en est pas de même en ce qui concerne les conditions de commutativité des puissances, dans le cas général. Pour le voir, je montre comment, par l'intermédiaire d'une identité générale, on peut remplacer une identité (I) homogène de degré n entre puissances d'un élément arbitraire par une relation (*linéarisation*) n -fois linéaire par rapport à n éléments arbitraires de l'anneau ⁽⁵⁾. L'étude de ces linéarisations me permet notamment de montrer que, même dans le cas où la caractéristique est nulle, les *anneaux à cubes uniques* ($xx^2 = x^2x$), les *anneaux à puissances principales uniques* ($xx^n = x^n x$), les *anneaux à puissances principales commutatives*

(1) C'est-à-dire les anneaux (non associatifs) tels qu'on ait toujours $x^p x^q = x^{p+q}$.

(2) Notamment en ce qui concerne les applications à la génétique.

(3) C'est-à-dire tel qu'on ait toujours $(xy)x = x(yx)$.

(4) Ces conditions sont $xx^2 = x^2x$ et $x^2x^2 = x^4$.

(5) Ce résultat précise et généralise au cas non associatif des résultats analogues de KAPLANSKY ({24} lemme 2) et de LEVITZKI ({25} lemme 3), qui ne s'appliquent d'ailleurs qu'à des identités polynômiales à coefficients constants (cf. Deuxième Partie).

($x^p x^q = x^q x^p$) et les anneaux à puissances commutatives forment des catégories effectivement distinctes. L'intérêt de ces linéarisations ne se borne d'ailleurs pas à cette conclusion négative : la linéarisation d'une identité (I) permet d'établir toutes les répercussions de cette identité sur les autres puissances de x : cette propriété sera utilisée dans la Deuxième Partie.

Dans une algèbre A (non associative) d'ordre m sur un corps, il existe un polynôme, dit *polynôme principal à droite (gauche)* de A , dont le « coefficient de tête » est 1 (les autres coefficients étant des polynômes par rapport aux coordonnées de l'élément général x), et tel que x soit un zéro de ce polynôme, tout en n'étant pas un zéro d'un polynôme analogue de degré inférieur. Cette propriété est susceptible de plusieurs généralisations (Chapitre IV) dans le cas des algèbres sur un anneau : dans la Deuxième Partie, j'étudie essentiellement les *algèbres du $n^{\text{ème}}$ degré* (§ 45, III) qui constituent la généralisation la plus immédiate des algèbres ayant une base finie sur un corps. Etendant légèrement la définition d'une linéarisation, je linéarise l'équation principale du $n^{\text{ème}}$ degré (Chapitre V). J'applique ces résultats généraux aux algèbres du second, du $3^{\text{ème}}$ et du $4^{\text{ème}}$ degré. Un des résultats essentiels est le suivant : toute algèbre du $n^{\text{ème}}$ degré, à cubes uniques, avec n inférieur à 5, est une algèbre à puissances commutatives et le module de toute sous-algèbre monogène admet une base d'au plus 7 éléments (des conditions très larges sont supposées remplies). Cette propriété et des contre-exemples me permettent de préciser la classification (donnée dans la Première Partie) des algèbres d'après les propriétés des puissances (théorème 27).

Après cette étude des puissances (ordinaires) d'un élément j'ai voulu, dans la Troisième Partie, mettre en évidence quelques caractères de la plus immédiate des généralisations de ces puissances que j'appelle puissances négatives : ce sont les puissances des inverses. En général dans un anneau non associatif il faut distinguer les puissances négatives à droite et les puissances négatives à gauche (en admettant qu'elles existent) : à peu de chose près, je me suis borné au cas, relativement général (Chapitre IX), où ces puissances étaient les mêmes et je montre que, même dans ce cas, plusieurs complications s'introduisent par rapport au cas associatif. Il y a lieu de distinguer les *réciproques* ou inverses absolus, les inverses propres et les inverses impropres (§ 84) : dans un anneau à puissances associatives l'associativité s'étend aux puissances négatives propres mais non aux puissances négatives impropres.

Je termine (Section II) en étudiant les algèbres symétriques qui sont telles, par définition, que tout élément (non nul) admette au moins un inverse bilatère. Si une algèbre symétrique est associative c'est évidemment une algèbre à division. Dans le cas non associatif il n'en est pas ainsi et je montre qu'on peut même ajouter des conditions supplémentaires sans rencontrer nécessairement le cas où la division est toujours possible et unique. J'en déduis deux classifications distinctes des algèbres symétriques : chacune des catégories d'algèbres ainsi définies constitue une généralisation des corps gauches. Par exemple, parmi les algèbres symétriques, les algèbres monosymétriques sont celles où l'inverse est unique, les algèbres absolument symétriques sont celles où l'un des inverses est toujours un réciproque. Je donne des propriétés de chacune des catégories que je définis. J'étudie les algèbres symétriques du second degré et je détermine celles d'entre elles qui sont réelles. Enfin j'établis des propriétés spéciales des algèbres symétriques d'ordre peu élevé ce qui me permet de déterminer toutes les algèbres réelles d'ordre inférieur à 5 appartenant à chacune des catégories introduites ; en particulier il en résulte que les algèbres réelles symétriques à division d'ordre inférieur à 8 sont de degré 2 ce qui ramène leur détermination à un problème résolu.

Ce travail a été fait non seulement dans un but de généralisations abstraites mais aussi en gardant à l'esprit ses applications possibles et, s'il existe une étroite relation entre la configuration des points dans un corps K d'une variété algébrique à coefficients dans K et les propriétés de divisibilité dans les algèbres sur K (§ 127), c'est principalement aux applications à la génétique que je pense.

Je suis heureux d'exprimer ma profonde gratitude à M. DUBREIL dont la bienveillance, les encouragements et les conseils m'ont permis d'entreprendre et de poursuivre ce travail. J'adresse ma respectueuse reconnaissance à M. CHATELET pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant la présidence du jury et je remercie vivement M. LICHNEROWICZ pour son très aimable accueil et ses conseils.

DÉFINITIONS GÉNÉRALES

1. — Anneaux non associatifs.

Si, dans la définition des anneaux, on conserve tous les axiomes, sauf l'associativité de la multiplication qu'on supprime, on obtient les anneaux non associatifs ⁽¹⁾.

D'après cela, les anneaux (associatifs) sont des cas particuliers des anneaux non associatifs et on a :

DÉFINITION 1. — *Un anneau non associatif A est un ensemble E où sont définies deux opérations (lois de composition interne), que nous désignerons par + (addition) et par $\times$ (multiplication), ces opérations satisfaisant aux règles suivantes :*

- 1° Les éléments de E forment un groupe abélien par rapport à l'addition.
- 2° Les éléments de E forment un groupoïde ⁽²⁾ par rapport à la multiplication.
- 3° La multiplication est distributive bilatéralement par rapport à l'addition.

En résumé :

- 1° L'addition définit un groupe abélien,
- 2° La multiplication est close,
- 3° A est linéaire.

Si le sens est évident nous dirons *anneau* pour *anneau non associatif*. Nous remplacerons généralement le symbole $\times$ par la juxtaposition : $a \times b = ab$.

2. — Algèbres non associatives.

Si $x \in A$ et si $n \in [1]$ (anneau des entiers rationnels, cf. § 7), on définit, d'après 1° (**{16}**, p. 35 et p. 52) nx et on a $nx \in A$. D'après 1° et 3° A peut être considéré comme un module sur [1] et on a $n(xy) = (nx)y = x(ny)$, ($y \in A$).

Plus généralement :

DÉFINITION 2. — *Une algèbre non associative A est un anneau non associatif qui est un B-module unitaire (cf. **{10}**, chapitre II, p. 3), B étant un anneau associatif, commutatif (et ayant un élément unité). Les opérations dans B sont notées comme les opérations dans A et la loi de composition externe qui définit le B-module est notée, multiplicativement, par juxtaposition. De plus, si on a $\xi \in B$, $x \in A$, $y \in A$ alors :*

$$\xi(xy) = (\xi x)y = x(\xi y).$$

Il en résulte que tout anneau non associatif définit une algèbre non associative sur [1].

(1) Les anneaux non associatifs (non-associative rings) sont encore appelés *narings* par B. BROWN et N.-H. MAC COY [« Some theorems on groups with applications to ring theory », *Trans. of the Am. Math. Soc.* vol. 69 (1950), p. 302].

(2) Il s'agit d'un groupoïde au sens de O. ORE (cf. **{16}**, p. 27).

Toutefois nous réserverons de préférence le nom d'algèbres non associatives aux anneaux non associatifs, B-module, pour lesquels interviendront explicitement des propriétés non triviales de B.

Nous désignerons par 1 l'élément unité de B.

Fréquemment B sera un corps (commutatif) F. Les particularisations les plus fréquentes de F seront : un corps réel K, le corps des nombres réels R.

3. — *Élément unité bilatère.*

DÉFINITION 3. — Si l'anneau non associatif A contient un élément, que nous désignons par e , tel que pour tout x de A on ait :

$$ex = xe = x ,$$

e est dit *élément unité bilatère* de A .

On sait ({16} , p. 34) que e est unique.

Nous dirons généralement *élément unité* pour *élément unité bilatère*.

Si A contient l'élément unité e nous choisirons toujours $B \simeq Be$ (B isomorphe à Be).

4. — *Notations.*

Les anneaux non associatifs (ou les algèbres non associatives) seront désignés par A suivi ou non d'indices, et quelquefois par C. En général les éléments de l'anneau (non associatif) A seront désignés par des lettres latines : $a, b, c, d, \dots$ désignant des éléments fixés, et $x, y, z, t, u, v, \dots$ des éléments arbitraires (que nous appellerons encore *variables*). Cependant m, n, p, q, r, s seront des éléments de l'anneau [1] (§ 7) et g, h, i, j, k, l des indices (ou des exposants) entiers positifs. De même, à part ces exceptions, les éléments de l'anneau B (associatif, commutatif et avec l'élément unité 1) seront désignés par des lettres grecques : $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$ désignant des éléments fixés, et $\xi, \eta, \zeta, \theta, \dots$ des éléments arbitraires.

PREMIÈRE PARTIE

ÉTUDE DE CERTAINES PROPRIÉTÉS DE COMMUTATION DES ANNEAUX NON ASSOCIATIFS

CHAPITRE PREMIER

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES ANNEAUX MONOGÈNES

5. — Définition des puissances.

1° Puissances finies d'un élément a .

Ce sont :

Les puissances principales à droite définies par

$$a^1 = a, \quad a^n = a^{n-1}a, \quad (n > 1).$$

Les puissances principales à gauche définies par

$$a^{*n} = a a^{*(n-1)}$$

[L'expression *puissance à droite (gauche)* voudra dire *puissance principale à droite (gauche)*].

Les *puissances mixtes* qui sont des produits d'un nombre fini de puissances principales (quelconques) associées d'une façon quelconque. Les puissances principales en sont des cas particuliers.

2° Degré d'une puissance finie.

Le degré de a^n et de a^{*n} est n , le degré d'une puissance mixte b de a est la somme des degrés des puissances principales de a figurant dans b . Dans un anneau (non associatif) quelconque le nombre des puissances distinctes de degré n d'un élément quelconque est en général {17} :

$$\frac{(2n-2)!}{(n-1)!n!}$$

Par suite, en particulier, l'ensemble des puissances finies d'un élément est dénombrable.

6. — Ordination des puissances.

Il suffit d'ordonner les puissances de degré n . Si on appelle *longueur* d'une puissance b de a le nombre minimum de puissances principales de a (non forcément distinctes) nécessaires pour former b , il suffit d'ordonner les puissances de degré n et de longueur l . On a nécessairement $l \leq n - 2$, les seules puissances de longueur $n - 2$ étant fournies par $(a^2)^2$ multipliée, d'une façon quelconque, $n - 4$ fois par a .

Pour ordonner les puissances de a de degré n et de longueur l il suffit d'ordonner ces puissances en considérant A comme commutatif (en complétant ensuite éventuellement par toutes celles des permutations de puissances principales qui fournissent des puissances distinctes). Pour ce faire, si $l > 1$, on peut procéder ainsi :

Première étape : définition et ordination de q éléments S_1 .

Les éléments S_i sont formés par la juxtaposition de l puissances principales dont la somme des degrés est n . En outre le degré de la seconde puissance principale à partir de la gauche (si cette puissance existe) est supérieur à 1.

Élément S_1 : on écrit la puissance principale de degré le plus grand possible ; puis, à droite de celle-ci, la puissance principale de degré le plus grand possible ; puis, à droite de celle-ci, la puissance principale de degré le plus grand possible ; ... etc.

Élément S_{p+1} : dans S_p soit en supposant qu'elle existe c la première puissance principale, *en commençant par la droite*, telle que les opérations suivantes soient possibles et donnent un élément S : on ne change pas les puissances principales situées à gauche de c (s'il y en a) ; on abaisse d'une unité le degré de c ; à la droite de celle-ci on écrit la puissance principale de degré le plus grand possible, à la droite de celle-ci on écrit la puissance de degré le plus grand possible..., etc. On effectue précisément ces opérations et on obtient S_{p+1} .

Deuxième étape.

Il reste à ordonner dans les éléments S toutes les associations de puissances principales compatibles avec la longueur l et à supprimer certaines répétitions.

Toute ordination des puissances faite de cette façon sera dite *ordination naturelle*.

Exemples. — L'ordination des puissances dans un anneau commutatif se trouve réalisée au chapitre III (en supprimant dans les expressions indiquées les crochets) pour les degrés suivants : degré 7 : premiers membres des relations (11) ; degré 8 : expression des éléments Y_i (§ 33) ; degré 9 : expression des éléments Z_i (§ 34).

7. — Définition d'un anneau monogène.

DÉFINITION 4. — Soit a un élément de l'anneau (non associatif) A . Nous appellerons anneau monogène $[a]$ (à crochets) le sous-anneau de A engendré par a si A n'a pas d'élément unité et par a et l'élément e si A contient un élément unité e . On posera alors $a^0 = e$.

En conformité avec cette définition, on notera $[1]$ l'anneau des entiers rationnels.

S'il arrive que $[a]$ soit un corps, pour préciser ce fait on posera $[a] = (a)$. Par exemple si $B = F$ (corps) on a : $[e] = (e) \simeq F$.

Plus généralement, si $a \in A$, $b \in A, \dots$, on désignera par $[a, b, \dots]$ le sous-anneau de A engendré par les éléments $a, b, \dots$ et, s'il existe, par l'élément e .

Remarque. — Si $e \in A$ on a $[0] = [e]$. Si A ne contient pas d'élément unité $[0]$ est l'anneau 0.

8. — Propriétés immédiates de l'anneau $[a]$.

LEMME 1. — Si $b \in [a]$ on a $[b] \subseteq [a]$.

En effet, si $c \in [b]$ c est une combinaison linéaire de puissances finies de b et (éventuellement) de e , donc (d'après la distributivité) une combinaison linéaire de puissances finies de a et (éventuellement) de e , donc $c \in [a]$.

COROLLAIRE 1. — Si $b \in [a]$ et $a \in [b]$, on a $[b] = [a]$.

Générateur. — Nous appelons générateur de $[a]$ tout élément b tel que $[b] = [a]$.

D'après le corollaire 1, pour qu'un élément b de $[a]$ soit un générateur de $[a]$, il faut et il suffit que l'on ait $a \in [b]$.

LEMME 2. — Si b est un générateur de $[a]$, tout élément $c = b + \lambda e$ ($\lambda \in B$) est un générateur de $[a]$.

En effet $c \in [b]$ et $b = c - \lambda e \in [c]$.

Au contraire si, par exemple, $c = b^2 + \lambda b + \mu e$ ($\mu \in B$) on a seulement $[c] \subseteq [b]$.

9. — Notation du module d'un sous-anneau.

$(a, b, \dots)$ est le module (sur B) engendré par les éléments $a, b, \dots$ de A . Si l'on a besoin de considérer le module de l'anneau A on le notera (A) .

$([a, b, \dots])$ désignera le module (sur B) engendré par tous les éléments du sous-anneau $[a, b, \dots]$.

$M + N + \dots$ désigne le module somme des modules $M, N, \dots$

10. — Module des puissances à droite de a .

Ce sera le module D_a engendré par les puissances à droite de a et, dans le cas où $e \in A$, par e .

Définition analogue du module G_a des puissances à gauche.

En général, on a : $([a]) \neq D_a \neq G_a \neq ([a])$.

11. — Anneaux particuliers.

ALBERT appelle anneau à puissances associatives {7} tout anneau A tel que si $x \in A$, $[x]$ soit associatif (donc commutatif).

Par analogie, nous appelons :

1° Anneau à puissances principales uniques tout anneau A tel que $x^n = x^n$, pour tout $n > 0$, ($x \in A$).

Si on a seulement $x^3 = x^3$ nous dirons que A est à cubes uniques.

2° Anneau à puissances quasi-associatives tout anneau A à puissances principales uniques tel que $([x]) = D_x$ ($x \in A$).

La restriction de la coïncidence des puissances principales se révèle utile dans la théorie des algèbres symétriques (Troisième Partie, § 106).

Exemples d'algèbres à puissances quasi-associatives : algèbres du 3^{ème} degré à cubes uniques de caractéristique première à 2 (Deuxième Partie, § 57) ; algèbres du 4^{ème} degré à cubes uniques de caractéristique première à 6 où la division par 2 est toujours possible dans B et où $x^2 x^2 \in (x^3, x^2, x, e)$ (Deuxième Partie, § 60).

CHAPITRE II

ANNEAUX FLEXIBLES ET A PUISSANCES FLEXIBLES

12. — Définitions.

On sait que, par définition {8}, un anneau A est *alternatif* si deux des trois relations :

$$(1) \ y (xx) = (yx) x, \quad (2) \ (xy) x = x (yx), \quad (3) \ (xx) y = x (xy)$$

sont vérifiées ($x \in A, y \in A$), la troisième l'est alors aussi.

Il résulte de cette condition que l'*associateur* :

$$(x, y, z) = x (yz) - (xy) z$$

est une fonction alternée de ses arguments, ce qui, réciproquement, entraîne que l'anneau est alternatif pourvu que la caractéristique de A soit première à 2 (c'est-à-dire $2a = 0$ entraîne $a = 0$). Voir {7}, p. 553 et noter que A n'a pas forcément de caractéristique).

Si la condition (1) est seule remplie A est *alternatif à droite*. Alors A est à puissances associatives si la caractéristique est première à 2 ({8}, p. 319). Si la condition (2) est seule remplie A est *flexible* ({8}, p. 318) et n'est pas à puissances associatives en général.

DÉFINITION 5. — Nous appelons anneau à puissances flexibles un anneau A tel que tout $[x]$ soit flexible ($x \in A$).

On verra (§ 37) qu'au point de vue généralité l'ensemble des anneaux à puissances flexibles est situé entre l'ensemble des anneaux à puissances principales commutatives c'est-à-dire tels que $x^p x^q = x^q x^p$, pour tout couple (p, q) d'entiers naturels, et l'ensemble des anneaux à puissances commutatives tels que tout $[x]$ soit commutatif.

13. — Anneaux flexibles et anneaux à puissances flexibles de caractéristique non première à 2.

THÉORÈME 1. — Tout anneau à puissances flexibles est à puissances principales commutatives.

Soit $[ab] = ab - ba$ le commutateur ⁽¹⁾ de a et b .

Si a et b sont des puissances (mixtes) d'un élément c , nous appelons *degré* (sous-entendu : en c) du commutateur $[ab]$ la somme des degrés, en c , de a et de b . La *longueur* du commutateur sera celle de ab . Un commutateur *principal* sera un commutateur de *longueur* inférieure à 3. L'expression *commutateur de degré n* désignera toujours un commutateur de deux éléments puissances d'un même élément.

(1) Cette notation employée avec un *produit* entre crochets ne sera pas confondue avec celle qui représente l'anneau monogène engendré par un élément.

On a d'abord :

LEMME 3. — Si x, y et z sont trois éléments qui commutent entre eux, d'un anneau flexible quelconque, on a la relation :

$$(4) \quad [(xy) z] = [x (yz)] .$$

En effet si dans (2) on remplace x par $x + z$ on obtient (§ 7) :

$$(2') \quad (xy) z + (zy) x = x (yz) + z (yx) ,$$

et la relation (4) se déduit de celle-ci et des relations de commutation.

Démontrons alors le théorème.

1° n étant un nombre naturel quelconque on a $[xx^n] = 0$. En effet en faisant $y = x$ dans (2) il vient $xx^2 = x^2x$. Supposons que l'on ait $xx^{n-1} = x^{n-1}x$, on a alors :

$$xx^n = x (x^{n-1}x) = (xx^{n-1}) x = x^n x.$$

2° Supposons que, dès que x et y sont des puissances principales (non nulles) d'un élément u de l'anneau, telles que le degré de xy soit inférieur à $n + 1$, on ait $[xy] = 0$. Considérons un troisième élément z , puissance principale (non nulle) de u , de telle sorte que le degré de $(xy) z$ soit $n + 1$. Par hypothèse x, y et z commutent et satisfont par suite à la formule (4), il en résulte ($0 < p < n$) :

$$\begin{aligned} 0 &= [x^n x] = [(x^{n-1}x) x] = [x^{n-1}x^2] \\ &= [(x^{n-2}x) x^2] = [x^{n-2}x^3] = \dots = [x^{n-p}x^{p+1}] . \end{aligned}$$

THÉORÈME 2. — Dans tout anneau à puissances flexibles les commutateurs $[(x^p x^q) x^r]$ (p, q, r étant des nombres naturels) sont nuls dans les deux cas suivants :

1° deux des nombres p, q, r sont égaux,

2° l'un d'eux est inférieur à 3.

1° D'après le théorème 1 et la loi flexible on a :

$$x^p (x^p x^q) = x^p (x^q x^p) = (x^p x^q) x^p$$

en outre, d'après la formule (4) :

$$[(x^p x^p) x^q] = [x^p (x^p x^q)] .$$

2° On a :

$$\begin{aligned} 0 &= [x^m x^{n+1}] = [x^m (x^n x)] = [(x^m x^n) x], \quad (m > 0, \quad n > 0) \text{ et} \\ [(x^m x^n) x^2] &= [(x^m x^n) x] x = [(x (x^m x^n)) x] = 0 . \end{aligned}$$

Donc :

$$0 = [(x^m x^n) x^2] = [x^m (x^n x^2)] = [x^m (x^2 x^n)] .$$

D'une façon générale si y et z commutent, on a évidemment :

$$(5) \quad [(yz) z] = 0 .$$

COROLLAIRE 2. — *Tous les commutateurs de degré inférieur à 12 et de longueur inférieure à 4 sont nuls.*

C'est une conséquence directe du théorème 2 et des propriétés des partitions de $n < 12$.

COROLLAIRE 3. — *Tous les commutateurs de degré inférieur à 10 sont nuls.*

Cela résulte du corollaire 2 et du fait que les commutateurs de degré inférieur à 10 et de longueur supérieure à 3, ou bien sont évidemment nuls par exemple, d'après (5), ou bien se ramènent par l'emploi, éventuellement réitéré, de la formule (4) aux commutateurs de longueur 3. Par exemple $(x^2x^2)x$, x et x^2 commutent d'après (5) et parce que :

$$[((x^2x^2)x)x^2] = [(x^2x^2)x^3] = 0.$$

Et il en résulte :

$$[[[(x^2x^2)x)x^2]x] = [[(x^2x^2)x)x^3] = [(x^2x^2)x^4] = 0.$$

14. — *Anneaux flexibles et à puissances flexibles de caractéristique première à 2.*

LEMME 4. — *Si x , y et z sont trois éléments qui commutent entre eux, d'un anneau flexible quelconque, on a la relation :*

$$(6) \quad 2 [(xy)z] = 0.$$

En effet, l'équation (4) s'écrit :

$$(4') \quad [(xy)z] + [(yz)x] = 0.$$

Permutons circulairement les lettres x , y , z et ajoutons les trois formules ainsi obtenues, il vient :

$$2 [(xy)z] + 2 [(yz)x] + 2 [(zx)y] = 0.$$

En ajoutant à cette dernière l'équation (4') multipliée par -2 et en permutant les lettres, on obtient l'équation (6).

Considérons maintenant, dans un anneau flexible, n éléments $u_1, u_2, \dots, u_n$ qui commutent entre eux. Supposons que deux produits quelconques d'éléments u_i (si des éléments manquent leur exposant sera par convention 0) commutent tant que le degré total en $u_1, u_2, \dots, u_n$ ne dépasse pas k : alors, pour tout produit d'éléments u_i de degré total $k + 1$ en $u_1, u_2, \dots, u_n$, la formule (6) s'applique, ce qui démontre par récurrence le :

THÉORÈME 3. — *Dans tout anneau flexible de caractéristique première à 2, tout sous-anneau, engendré par n éléments quelconques qui commutent entre eux, est commutatif.*

Le raisonnement qui précède le théorème 3 démontre aussi le :

THÉORÈME 4. — *Dans tout anneau à puissances flexibles, tout commutateur, de degré n par rapport à un élément (quelconque), multiplié par 2^k est nul. Si $n \leq 9$ on a $k = 0$, si $n > 9$ on a $k = n - 9$.*

La détermination de k provient du corollaire 3.

En particulier :

THÉORÈME 5. — *Pour qu'un anneau de caractéristique première à 2 soit un anneau à puissances commutatives il faut et il suffit qu'il soit à puissances flexibles.*

Ce théorème, en réduisant l'utilité des théorèmes 1 et 2 au cas où la caractéristique n'est pas première à 2, justifie le titre du paragraphe 13.

CHAPITRE III

PROPRIÉTÉS DE COMMUTATION DES ANNEAUX MONOGÈNES

A. — IDENTITÉS GÉNÉRALES ET LINÉARISATIONS

15. — Notations.

1° Soient $x_1, \dots, x_n$ des éléments quelconques d'un anneau non associatif quelconque A. Nous posons :

$$S_d(x_1, x_2) = x_1 x_2 + x_2 x_1, \quad S_d(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n S_d(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) x_i.$$

De même $S_g(x_1, \dots, x_n)$ est défini d'une façon analogue par des multiplications successives à gauche. Quand les arguments de ces fonctions n'auront pas besoin d'être précisés, nous écrirons S_d et S_g .

S_d et S_g sont des fonctions *symétriques* de leurs arguments. $S_d(x_1, \dots, x_n)$ contient $n!$ produits tels que $(\dots ((x_1 x_2) x_3) \dots) x_n$.

2° Concevons toutes les puissances de x ($x \in A$) de degré n écrites de la façon ordinaire, avec les exposants des puissances principales, x étant remplacé par x^1 , et les parenthèses successives étant supposées prolongées jusqu'à la ligne des exposants. A chacune de ces puissances faisons correspondre la partition (non associative) de n qui s'en déduit, en retenant seulement la ligne des exposants. Soit y l'une de ces puissances et $p(n)$ la partition correspondante, nous posons (cf. {19}), toutes les fois que cela réalisera une simplification considérable de la forme : $y = x^{p(n)}$.

Si « l'entier partitionné » $p(n)$ a besoin d'être explicité, nous remplacerons, pour éviter des confusions, les espaces de la ligne des exposants qui séparent soit deux puissances principales soit une parenthèse et une puissance principale, par le symbole $*$.

Exemples. — Si $y = x^n$ on a $p(n) = n$, si $y = (x^2 x^2) x$ on a $p(5) = (2 * 2) * 1$.

16. — Identités générales dans un anneau non associatif quelconque.

THÉORÈME 6. — Soient $x_1, \dots, x_n$ n éléments d'un anneau non associatif quelconque et s_n le coefficient du produit $\prod_{i=1}^n \lambda_i$ (λ_i arbitraires dans B) dans le développement de $(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i)^{p(n)}$ on a :

$$(1) \quad s_n = \sum_{q=1}^n \left((-1)^{n-q} \sum_{C_n^q} (\sum x_i)^{p(n)} \right)$$

L'indice placé sous les signes Σ de la grande parenthèse indique le nombre de termes :

$\sum_{C_n^q} (\sum x_i)^{p(n)}$ signifie : l'indice i prend q valeurs parmi les nombres $1, \dots, n$; on fait ensuite la somme des C_n^q expressions *distinctes* ⁽¹⁾ $(\sum x_i)^{p(n)}$.

Démontrons la formule (1) :

Prenons pour les λ_i des éléments quelconques du sous-ensemble $\{0,1\}$ de B , de sorte que $\lambda_i^p = \lambda_i$ ($p > 0$). Considérons le développement $\mathcal{D}$ de $(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i)^{p(n)}$. Appelons s_1 , la somme de tous les termes, en x_i , de $\mathcal{D}$ qui sont facteurs de λ_h seul ($h = 1, \dots, n$), s_2 la somme de tous les termes de $\mathcal{D}$ qui sont facteurs de $\lambda_h \lambda_i$ seuls ($h < i = 2, \dots, n$), s_3 la somme de tous les termes de $\mathcal{D}$ qui sont facteurs de $\lambda_h \lambda_i \lambda_j$ seuls ($h < i < j = 3, \dots, n$), etc...

Dans l'identité $(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i)^{p(n)} = \mathcal{D}$ faisons :

1°/ $\lambda_h = 1$ et les autres λ nuls. On prend successivement $h = 1, h = 2, \dots, h = n$;

2°/ $\lambda_h = \lambda_i = 1$, les autres λ nuls ($h < i = 2, \dots, n$) ;

3°/ $\lambda_h = \lambda_i = \lambda_j = 1$, les autres λ nuls ($h < i < j = 3, \dots, n$) ;

.....
 q° / $\lambda_h = \lambda_i = \dots = \lambda_l = 1$, les autres λ nuls ($h < i \dots < l = q, \dots, n$) ;

.....
 n° / $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 1$.

En sommant les identités obtenues par 1°, puis les identités obtenues par 2°, ..., etc... il vient respectivement :

$$1^\circ/ \sum_{C_n^1} x_i^{p(n)} = s_1 ;$$

$$2^\circ/ \sum_{C_n^2} (\sum x_i)^{p(n)} = C_{n-1}^1 s_1 + s_2 ;$$

$$3^\circ/ \sum_{C_n^3} (\sum x_i)^{p(n)} = C_{n-1}^2 s_1 + C_{n-2}^1 s_2 + s_3 ;$$

$$q^\circ/ \sum_{C_n^q} (\sum x_i)^{p(n)} = C_{n-1}^{q-1} s_1 + C_{n-2}^{q-2} s_2 + C_{n-3}^{q-3} s_3 + \dots + s_q ;$$

$$n^\circ/ (\sum x_i)^{p(n)} = s_1 + s_2 + s_3 + \dots + s_q + \dots + s_n$$

(1) La formule (1) évidente dans le cas $n = 2$, est indiquée dans le cas $p(n) = 3$ par N. JACOBSON [21], formule (6)].

Multiplions la $q^{\text{ème}}$ équation par $(-1)^{n-q}$, faisons $q = 1, 2, \dots, n$ et sommons, d'après les propriétés des coefficients du binôme, on obtient la formule (1).

17. — Cas particuliers.

$$1^{\circ} \quad p(n) = n.$$

Alors d'après la définition 1° du paragraphe 15 on a :

$$(2) \quad s_n = S_d(x_1, \dots, x_n).$$

De même si on prend $p(n) = n = 1 * (1 * (1 * (\dots * 1))) \dots$ on a :

$$(2') \quad s_n = S_g(x_1, \dots, x_n).$$

$$2^{\circ} \quad p(n) = p * q.$$

Il vient alors :

$$(3) \quad s_n = \sum_{C_{p+q}^p} S_d(x_h, \dots, x_i) S_d(x_j, \dots, x_k).$$

$\leftarrow p \rightarrow \quad \leftarrow q \rightarrow$

Le second membre de (3) signifie la somme des C_{p+q}^p produits *distincts* $S_d(x_h, \dots, x_i) S_d(x_j, \dots, x_k)$ où les p indices $h, \dots, i$ et les q indices $j, \dots, k$, tous *différents* prennent les valeurs $1, 2, \dots, p + q$.

18. — Linéarisations.

Soit F un ensemble bien déterminé d'opérations faisant correspondre à tout élément x d'un anneau non associatif A un élément unique $F(x)$ de A . $F(x)$ est une fonction de x . Si, d'après les axiomes de l'anneau A , on a :

$$(I) \quad F(x) = 0, \quad \text{pour tout } x \text{ de } A,$$

(I) est une *identité* de A .

Nous appellerons *linéarisation* de (I) toute relation (si elle existe).

$$(L) \quad H(x_1, \dots, x_k) = 0,$$

telle que :

1° H soit un polynôme du premier degré, à coefficients dans B , par rapport à chacun de ses arguments x_i ($i = 1, \dots, k$) ;

2° H soit symétrique par rapport à ses arguments x_i ;

3° La relation (L) soit vraie pour des éléments x_i ($i = 1, \dots, k$) *arbitraires* dans tout anneau non associatif où l'identité (I) est vraie : (L) est une *conséquence* de (I) ;

4° On ait $H(x_1, \dots, x_k) = k! F(x)$ si $x_1 = x_2 = \dots = x_k = x$.

Il en résulte que (L) est équivalente à (I) si la caractéristique de A est première à k !

Nous nous bornerons à étudier les linéarisations des relations pour lesquelles F est un binôme à coefficients ± 1 . $H(x_1, \dots, x_k)$ est alors une fonction symétrique du premier degré de ses arguments à coefficients dans $[1]$.

19. — Linéarisation de la relation $x^n = x^n$.

THÉOREME 7. — Si dans un anneau A , pour tout x de A , on a $x^n = x^n$ (n étant un nombre naturel), il en résulte :

$$(4) \quad S_d(x_1, \dots, x_n) - S_g(x_1, \dots, x_n) = 0,$$

pour tout ensemble $x_1, \dots, x_n$ d'éléments de A .

En effet, par hypothèse, les seconds membres de la formule (1) où nous faisons successivement $p(n) = n$ et $p(n) = .n$ sont égaux et la formule (4) résulte alors des formules (2) et (2').

Inversement, si la caractéristique de A est première au produit des facteurs premiers de $n!$, la relation (4) entraîne $x^n = x^n$: il suffit de faire $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ dans (4).

20. — Linéarisation de la relation $x^p x^q = x^q x^p$.

THÉOREME 8. — Si dans un anneau A , pour tout x de A , on a $x^p x^q = x^q x^p$ (p et q étant des nombres naturels), il en résulte :

$$(5) \quad \sum_{\substack{p+q \\ c^p}} [S_d(x_1, \dots, x_i) \xleftarrow{p} \xrightarrow{q} S_d(x_j, \dots, x_k)] = 0,$$

pour tout ensemble $x_1, \dots, x_{p+q}$ d'éléments de A .

En effet, par hypothèse, le second membre de la formule (1) ne change pas si on permute p et q dans $p(n) = p * q$.

Inversement, si la caractéristique de A est première au produit des facteurs premiers de $(p + q)!$ la relation (5) entraîne $x^p x^q = x^q x^p$.

21. — Autres linéarisations.

La linéarisation de $x^p x^q = x^q x^p$ s'obtient évidemment en changeant d en g dans la formule (5).

Plus généralement, la linéarisation de la relation $x^{p(n)} = x^{p'(n)}$ est $s_n = s'_n$ où s'_n désigne le premier membre de la formule (1) relative à la partition $p'(n)$.

Enfin si on a $F(x) = \sum_i \lambda_i x^{p_i(k)}$, $H(x_1, \dots, x_k)$ se déduit de $F(x)$ par le changement de $x^{p_i(k)}$ en une expression formée de la façon suivante : on remplace le $j^{\text{ème}}$ ($j = 1, \dots, k$) élément x figurant dans $x^{p_i(k)}$ par x_j (les associations de facteurs étant respectées) et on fait la somme des $k!$ termes déduits de celui-ci par les $k!$ permutations des indices $1, \dots, k$. Il suffit pour le voir d'appliquer à $F(x)$ l'algorithme qui, au second membre de la formule (1), est appliqué à $x^{p(n)}$.

B. — PARTITIONS COMMUTATIVES COMPLETES.

22. — Définition. Propriétés immédiates.

Soit k et n deux nombres naturels tels que $k \leq n$. Formons un élément ϵ de la façon suivante :

Considérons k nombres naturels $n_1, \dots, n_k$ quelconques, de somme n . A chaque nombre n_i associons une partition (non associative) p_i de n_i qui (§ 15) correspond à une puissance quelconque de degré n_i de l'élément arbitraire x d'un anneau A .
 $\epsilon = \{p_i\} \quad , \quad (i = 1, \dots, k)$

Soit $\epsilon' = \{p_{j_i}\}$ un élément tel que :

1° Il existe une permutation n_{j_i} des nombres n_j ($j = 1, \dots, k$) telle que $n_{j_i} = n_i$ ($i = 1, \dots, k$) ;

2° p_{j_i} et p_i définissent la même puissance de x d'un anneau A supposé commutatif quelconque.

Alors, nous posons $\epsilon = \epsilon'$ et nous appelons ϵ une *partition commutative complète de n en k parties*.

Soit p_n^k le nombre des partitions commutatives complètes de n en k parties. p_n^1 est le nombre des puissances distinctes de degré n de x dans un anneau commutatif quelconque. Il en est de même de p_n^2 . En effet, pour $n > 1$, les puissances y de degré n de x peuvent toujours être regardées comme le produit d'exactly deux puissances de x , dont l'ordre n n'intervient pas.

Au contraire $p_n^k > p_n^{k+1}$ si $k > 1$ car, n étant donné, augmenter k d'une unité revient à rétablir l'associativité pour $k+1$ (au lieu de k) éléments dont le produit est y , c'est-à-dire à ne plus regarder comme distinctes des combinaisons qui l'étaient précédemment.

Nous posons $p_n^1 = p_n^2 = p_n$, si $n > 1$ et $p_1 = 1$. On a {17} :

$$p_{2n-1} = p_1 p_{2n-2} + p_2 p_{2n-3} + \dots + p_{n-1} p_n ,$$

$$p_{2n} = p_1 p_{2n-1} + p_2 p_{2n-2} + \dots + p_{n-1} p_{n+1} + p_n (p_n + 1) .$$

23. — Nombres de commutateurs de degré n .

Si tous les commutateurs d'un élément a sont nuls jusqu'au degré $n - 1$ inclus, il ne peut y avoir plus de p_n commutateurs distincts de degré n . En effet, dans ce cas on écrit tous les commutateurs de degré n en encadrant d'un crochet toutes les puissances distinctes de l'élément arbitraire d'un anneau commutatif. Si n est pair, $p_{\frac{n}{2}}$ des commutateurs sont identiquement nuls : ce sont les commutateurs de la forme $[zz]$, z étant une puissance de x de degré $\frac{n}{2}$. Il reste donc à considérer c_n commutateurs avec :

$$c_{2n-1} = p_{2n-1} , \quad c_{2n} = p_{2n} - p_n .$$

24. — Tableau de nombres p_n^k et c_n .

Les nombres p_n^n et p_n^0 n'ont pas été indiqués car les partitions correspondantes ne fournissent pas de résultats utilisés dans ce travail.

D'après ce tableau, pour les valeurs de n et k considérées et pour $1 < k < n \leq 2k$, on a $p_n^k = 2^{n-k-1}$.

TABLEAU P

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p_n	1	1	2	3	6	11	23	46	98	207	451
c_n	0	1	1	3	5	11	21	46	95	207	445
p_n^3			1	2	4	7	14	29	60	127	275
p_n^4				1	2	4	8	15	31	66	139
p_n^5					1	2	4	8	16	31	68
p_n^7							1	2	4	8	16
p_n^8								1	2	4	8
p_n^9									1	2	4

C. — APPLICATIONS

25. — Méthode.

Etant donnée une relation binôme :

$$(I) \quad F(x) = 0,$$

de degré $k > 2$ à coefficients ± 1 entre puissances d'un élément arbitraire x d'un anneau A , nous cherchons les conséquences des axiomes de la définition 1 (§ 1) et de (I) sur les autres puissances. (*Remarque.* — Les axiomes généraux des anneaux non associatifs intervenant seuls dans cette recherche, ces conséquences ne font évidemment pas intervenir les éléments d'un anneau B , éventuel, distinct de $[1]$).

Nous utilisons la linéarisation

$$(L) \quad H(x_1, \dots, x_k) = 0$$

de (I). Pour trouver les conséquences de (I) sur les puissances de degré n , nous faisons dans (L) $x_i = x^{p_i(m_i)}$ (les i variant de 1 à k et les m_i étant des entiers non négatifs de somme n) de toutes les façons possibles. Nous obtenons un système (T_n) d'équations entre les puissances de degré n . Ce système contient des équations formant un système (R_n) où les m_i sont tous strictement positifs et, dans le cas où l'anneau A contient un élément unité e , des équations (obtenues pour des m_i nuls) où figure au moins une fois

l'élément e . Ces équations résultent de la linéarisation d'identités de la forme (I) de degré $p < k$. En effet, on a :

$$H(x_1, \dots, x_{k-1}, e) = \sum_i p_i H_i(x_1, \dots, x_{k-1})$$

$$(p_i \text{ nombres naturels tels que } \sum p_i = k) \quad ,$$

la valeur des p_i et le nombre des fonctions H_i dépendant de la fonction H considérée. Par exemple, si $F(x) = [x^p x^q]$ ($p+q=k$), la fonction $H(x_1, \dots, x_k)$ est égale au premier membre de la formule (5) ; appelons $H(p, q)$ cette expression pour des x_i quelconques et $H^-(p, q)$ cette même expression où l'un des x_i est remplacé par e , on a :

$$H^-(p, q) = p H(p-1, q) + q H(p, q-1) \quad .$$

Il en résulte en particulier que si la caractéristique de A est première à $n!$ (et si A contient un élément unité), l'équation $[x^{n-1}x] = 0$ entraîne l'équation $[x^p x] = 0$ pour $p < n$.

Dans les exemples traités (§§ 28 et suivants) ces identités de degré $p (< k)$ auront déjà été considérées antérieurement et par suite les équations figurant dans (T_n) et non dans (R_n) auront déjà été obtenues (ou sont triviales si $p < 3$). Le système (T_n) est de la forme :

$$(T_n) \quad F_f = H(x^{p_{1f}}(m_{1f}), \dots, x^{p_{kf}}(m_{kf})) = 0 \quad ,$$

deux suites qui ne diffèrent l'une de l'autre que par l'ordre des entiers partitionnés p_{hf} ($h = 1, \dots, k$) étant considérées comme identiques puisque la fonction H est symétrique par rapport à ses arguments. Le système (R_n) se déduit du système (T_n) en retenant celles de ces équations pour lesquelles $n_{hd} = m_{hd} > 0$ ($h = 1, \dots, k$) :

$$(R_n) \quad D_d = H(x^{p_{1d}}(n_{1d}), \dots, x^{p_{kd}}(n_{kd})) = 0 \quad .$$

Dans le cas où A ne contient pas d'élément unité le système (T_n) se réduit nécessairement au système (R_n) .

Considérons maintenant des identités (I) de la forme :

$$(I_s) \quad F(x) = [x^p x^p] = 0 \quad .$$

Pour étudier les systèmes (R_n) relatifs à ces équations, nous supposons que les commutateurs dont le degré en x est inférieur à $n-1$ sont nuls : cette hypothèse se trouvera réalisée dans tous nos calculs (cf. §§ 27 et suivants). Alors le système (R_n) se réduit à un système (S_n) contenant au plus (§ 22) p_n^k équations distinctes :

$$(S_n) \quad E_j = H(x^{p_{1j}}(n_{1j}), \dots, x^{p_{kj}}(n_{kj})) = 0 \quad (j = 1, \dots, p_n^k) \quad .$$

26. — *Propriétés des systèmes* (R_n) , (S_n) et (T_n) .

Dans un système (R_n) nous considérons comme égaux deux éléments $x^p(s)$ et $x^{p'}(s')$ si et seulement si ces deux éléments se trouvent toujours égaux pour la variable x d'un anneau non associatif A quelconque, ce que nous écrivons $p(s) = p'(s')$ (ce qui entraîne évidemment $s = s'$). Dans un système (S_n) ces deux éléments seront considérés comme égaux si et seulement si ces deux éléments sont égaux pour tout élément x (d'un anneau A quelconque), tel que les commutateurs de degré inférieur à $n - 1$, en x , soient nuls (cf. §§ 27 et suivants).

THÉOREME 9. — 1° Nous considérons un système (S_n) , avec $n > k$, relatif à l'équation $F(x) = [x^{k-1}x] = 0$. Aucun des premiers membres E_j de ce système n'est combinaison linéaire sur $[1]$ des autres : le système (S_n) est composé d'équations linéairement indépendantes sur $[1]$.

2° Nous considérons des anneaux A généraux de caractéristique première à $k!$ et satisfaisant à une relation (I). Quelle que soit la relation (I) toutes les conséquences de cette relation (écrite pour un élément x ARBITRAIRE) sur les puissances de degré n d'un élément a peuvent se déduire de l'ensemble des systèmes $(T_0), (T_1), \dots, (T_n)$ où l'on a fait $x = a$.

3° Soit (I') une identité déduite d'un système quelconque (S_n) — ou (R_n) — ou (T_n) — par des combinaisons linéaires sur $[1]$. Le système $(S'_p) = (R'_p) = (T'_p) = (p \geq n)$ correspondant est formé d'équations déduites de celles de $(S_p) = (R_p) = (T_p)$ — par des combinaisons linéaires sur $[1]$.

1° Pour montrer qu'il n'existe pas dans $[1]$ d'éléments r_j tels qu'on ait, par exemple :

$$(N) \quad E_1 = \sum r_j E_j \quad (j = 2, \dots, p_n^k)$$

nous allons montrer que certains des éléments figurant au premier membre avec un coefficient non nul ne figurent pas au second membre.

En effet, le système (S_n) relatif à la relation $[x^{k-1}x] = 0$ est de la forme :

$$(S_n) \quad E_j = \sum_k [S_d(x^{p_1 j}, \dots, x^{p_{k-1} j}) x^{p_k j}] = 0$$

Pour simplifier l'écriture, nous supprimerons l'indice j ($= 1$) dans E_1 et nous appellerons p' un exposant relatif à un E_j pour $j > 1$.

a) Deux termes placés dans deux crochets différents de l'expression E_1 (par exemple), ne peuvent se détruire. Sinon, en effet, il existerait, par exemple, un indice $i \neq k$ tel que :

$$x^{p_1} \dots x^{p_i} \dots x^{p_{k-1}} = x^{p_i}$$

(le premier membre étant un produit à droite), ce qui est impossible.

b) Il ne peut y avoir plus d'un des k crochets figurant dans E_1 qui contienne un terme nul. En effet, on aurait, par exemple, à la fois :

$$x^{p_1} \dots x^{p_{k-1}} = x^{p_k}, \quad x^{p_m} \dots x^{p_k} \dots x^{p_l} = x^{p_{k-1}},$$

ce qui est impossible. Si d'ailleurs $p_k = 1$ il est clair qu'aucun terme du crochet ne peut être nul.

c) Il résulte a fortiori de ce qui précède qu'il existe, par exemple dans E_1 , au moins deux exposants, appelons p_k l'un d'eux, tel que tous les monômes de la somme $S_d(x^{p_1}, \dots, x^{p_{k-1}}) x^{p_k}$ et de la somme qui se déduit de celle-ci en permutant x^{p_k} avec l'un convenable des x^{p_i} ($i < k$) figurent dans E_1 avec un coefficient non nul ; si 1 figure parmi les exposants, on prendra $p_k = 1$. Soient y l'un quelconque de ces monômes et z un monôme quelconque figurant dans le second membre de la relation (N).

d) Montrons que l'un au moins des y n'est égal à aucun z . En effet, la partition commutative complète de n en k parties $\{p_h\}$ ($h = 1, \dots, k$) qui figure dans E_1 est différente de toutes celles qui figurent dans le second membre de (N). Pour qu'un y puisse égaler l'un des z il faut qu'il y ait un réarrangement des exposants, c'est-à-dire que l'un au moins des exposants p ou des exposants p' soit égal à 1 et qu'il soit « absorbé » par un exposant voisin. Supposons que l'un des exposants p soit égal à 1. Ou bien il existera au moins un y tel que l'exposant 1 ne soit pas absorbé et celui-là ne sera égal à aucun z , ou bien l'exposant 1 sera absorbé dans tous les y : dans ce cas, la partition commutative complète définissant E_1 sera $\{n - k - 1, 1, \dots, 1\}$ et l'un des y sera x^n , cet exposant ne pouvant s'introduire qu'avec cette partition ne figure pas au second membre de (N). Un raisonnement analogue aboutit à la même conclusion si c'est l'un des exposants p' qui est égal à 1.

2° La caractéristique de A étant première à $k!$ la linéarisation (L) de la relation (I) lui est équivalente. Plaçons-nous dans le sous-anneau $[a]$ et affectons d'un indice a supérieur les systèmes (T_p) ($p = 0, 1, \dots, k, k + 1, \dots$) supposés écrits pour l'élément a . Le système formé de l'ensemble des systèmes $(T_0^a), \dots, (T_k^a)$ entraîne la relation $H(x_1, \dots, x_k) = 0$ où les x_i sont des éléments arbitraires appartenant au module formé par l'élément e (s'il existe) et par toutes les puissances de a de degré inférieur à $n + 1$. En effet, d'après la linéarité de H , le premier membre de cette relation est une somme, à coefficients dans B , de termes de la forme $H(a^{p_1(m_1)}, \dots, a^{p_k(m_k)})$ les m_i étant des entiers non négatifs de somme inférieure à $nk + 1$: ces termes sont nuls par hypothèse. Par conséquent, le système formé de tous les systèmes $(T_0^a), (T_1^a), \dots, (T_k^a), \dots$ entraîne la relation (L) où les x_i sont arbitraires dans $[a]$. Comme dans un anneau A quelconque, d'une relation entre puissances de degré $m > n$ d'un élément a particulier on ne peut déduire une relation entre les puissances de degré n de a , il en résulte que toute relation entre puissances de a de degré n peut être déduite des relations $(T_0), (T_1), \dots, (T_n)$ écrites pour $x = a$.

3° Ecrivons la démonstration pour les systèmes (S). Soit $F'(x) = 0$ l'identité (I'), $F'(x)$ étant un polynôme en x de degré n à coefficients dans $[1]$. Par hypothèse $F'(x) = \sum_j l_j H_j$ ($j = 1, \dots, p_k^1$) avec $H_j = H(x^{p_{1j}}(n_{1j}), \dots, x^{p_{kj}}(n_{kj}))$, $\{p_{1j}, \dots, p_{kj}\}$ étant une partition commutative complète de n en k parties. Le système (S_p) est formé des équations :

$$(S_p) \quad H_r(x^{p_{1r}}(p_{1r}), \dots, x^{p_{kr}}(p_{kr})) = 0 \quad (r = 1, \dots, p_k^1)$$

Le système (S_p') est formé d'équations :

$$(S_p') \quad H'_s(x^{p_{1s}}(p_{1s}), \dots, x^{p_{ks}}(p_{ks})) = 0 \quad (s = 1, \dots, p_p) ,$$

les H'_s se déduisant (cf. § 21) de l'expression $F'(x)$ par des combinaisons linéaires à coefficients ± 1 ($= \varepsilon$) d'expressions de la forme $F'(x^{p_{1s}}(p_{1s}) + \dots + x^{p_{is}}(p_{is}))$.

Par suite :

$$H'_s = \sum_j l_j \varepsilon H_j \left((x^{p_{1s}} + \dots + x^{p_{is}})^{p_{1j}(n_{1j}), \dots} \right)$$

En vertu du caractère linéaire des fonctions H , il ne reste plus après le développement des sommes aux puissances convenables que des fonctions H dont les arguments sont des puissances de x . Comme le premier membre est un polynôme homogène de degré p en x , il ne reste plus au second membre que des puissances telles que les fonctions H soient de degré *total* p en x . Par suite :

$$(G) \quad H'_s = \sum_r l'_r H_r \quad (l'_r \in [1]) \quad C. Q. F. D.$$

Exemples. — La relation (I) $x^3 - x^3 = 0$ entraîne (voir § 28) la relation (I') $4(x^4 - x^4) = 0$. La plus simple des identités telles que (G) relative à cette relation s'écrit (en posant $S_d \pm S_g = S_{d \pm g}$) :

$$S_{d-g}(x, x, x, x^2) = 3 S_{d-g}(x, x^2, x^2) + 3 S_{d-g}(x, x, x^3) \quad (\text{dans } (S_s)) .$$

(Si on appliquait le raisonnement 3° ci-dessus, ce serait $4 S_{d-g}(x, x, x, x^2)$ qui serait *identiquement* dans (S_s) (cf. début § 26) une combinaison linéaire des fonctions S_{d-g} de 3 arguments.)

En se plaçant dans (R_s) la relation (I') s'écrit :

$$2([x^3x] + [x^2x]) = 0$$

et l'identité (G) relative à (I') est :

$$\begin{aligned} & [S_{d+g}(x, x, x, x^2) + 3 [S_{d+g}(x, x, x^3) x] \\ & = 6 S_{d-g}(x, x^2, x^2) + 3 S_{d-g}(x, x, x^3) + 3 S_{d-g}(x, x, x^3) \quad (\text{dans } (R_s)). \end{aligned}$$

La première identité en résulte en faisant $x^3 = x^3$.

27. — Indication des propriétés cherchées.

Nous nous bornerons à chercher des conséquences de certaines relations de commutation entre les puissances d'un élément. Notamment, partant de la plus simple possible de ces relations ($xx^2 = x^2x$) nous montrerons qu'elle entraîne (si la caractéristique est première à 2) $xx^3 = x^3x$, mais non pas $xx^4 = x^4x$. Délaissant alors la relation $xx^3 = x^3x$ (partie 3° du théorème 9), nous supposerons qu'on a $[x^2x] = [x^4x] = 0$ et nous chercherons les conséquences de ces relations. Et ainsi de suite. Nous remarquerons alors que non seulement les systèmes (S_n) formés satisfont au théorème 9, mais encore qu'ils sont résolubles sur $[1]$ en fonction de certains commutateurs (si la caractéristique est première à un certain produit de facteurs premiers) et que chaque système (Σ_n) formé

par la réunion de systèmes $(S_n), (S'_n) \dots$ provenant de la linéarisation de relations $(I), (I'), \dots$ indépendantes ⁽¹⁾ est composé d'équations *linéairement indépendantes* sur $[1]$ et résolubles sur $[1]$ en fonction de certains commutateurs.

28. — Anneaux à cubes uniques de caractéristique première à 2.

Si $x^3 = x^3$, on a :

$$(I_3) \quad S_d(x_1, x_2, x_3) - S_g(x_1, x_2, x_3) = 0$$

Faisons dans cette relation :

$$x_1 = a^{p_1}(k), \quad x_2 = a^{p_2}(l), \quad x_3 = a^{p_3}(m)$$

$$(k, l, m \text{ nombres naturels tels que } k + l + m = n)$$

Supposons que tous les commutateurs des puissances de a soient nuls jusqu'au degré $n - 1$ inclus. Alors si la caractéristique de A est première à 2, les c_n commutateurs des puissances de degré n de a sont liés par les p_n^3 relations *indépendantes* (théorème 9) :

$$(6) \quad [(a^{p_1} a^{p_2}) a^{p_3}] + [(a^{p_2} a^{p_3}) a^{p_1}] + [(a^{p_3} a^{p_1}) a^{p_2}] = 0$$

En particulier, faisons $p_1 = p, p_2 = p_3 = 1$ il vient les p_{n-2} équations :

$$(7) \quad [a^p a^2] = 2 [(a^p a) a]$$

En faisant dans ces relations $p = n - 2$, puis $p = (\dots (2 * 2) * 1) * \dots * 1$ on obtient,

THÉOREME 10. — Si dans un anneau à cubes uniques, de caractéristique première à 2, les commutateurs de degré inférieur à n des puissances d'un élément sont nuls, il existe une ordination naturelle des commutateurs de degré n des puissances de cet élément telle que le second et l'avant-dernier soient doubles respectivement du premier et du dernier.

Pour que $[a^{n-2} a^2] = 2 [a^{n-1} a]$ il suffit (la caractéristique étant première à 2) que l'on ait $[a^{n-2} a] = 0$ comme on le voit en faisant la substitution $(n - 2, 1, 1)$ dans I_3 .

COROLLAIRE 4. — Dans un anneau à cubes uniques, de caractéristique première à 2 on a $x^4 = x^4$ pour tout x .

En effet, les conditions du théorème 9 sont vérifiées pour tout élément si $n = 4$ et on a $[x^2 x^2] = 0$.

(1) La relation (I') sera dite indépendante des relations $(I_1), (I_2), \dots$, si elle n'est pas une conséquence de ces relations.

La condition sur la caractéristique est bien nécessaire pour la validité de ce corollaire. En effet, considérons l'algèbre, sur un anneau B quelconque de caractéristique 2, définie par la table de multiplication suivante :

TABLE I

e	a	a^2	a^3
a	a^2	a^3	e
a^2	a^3	e	e
a^3	0	e	e

Soit $x = \sum_{i=0}^3 \xi_i a^i$ l'élément général de cette algèbre, dans x^2 le coefficient de a est $2 \xi_0 \xi_1 = 0$ et le coefficient de a^3 est $2 (\xi_0 \xi_3 + \xi_1 \xi_2) = 0$ donc $x^2 = \lambda e + \mu a^3$ ($\lambda \in B, \mu \in B$). Par suite $x^2 x = x x^2$. Cependant $e = a a^3 \neq a^3 a = 0$.

Si la caractéristique n'est pas première à 2 on a seulement $4 (x^4 - x^4) = 0$.

29. — Commutateurs de degré 5 et de degré 6 dans les anneaux à cubes uniques.

D'après le corollaire 4 les commutateurs de degré 4 sont nuls, les équations (6) pour le 5^{ème} degré s'appliquent donc à tout élément, soit x , de A. Il en résulte en posant $v = [x^4 x]$:

$$(8) \quad [(x^2 x^2) x] = -2 [x^3 x^2] = -4 v.$$

Dans l'équation (I_3) faisons les $p_6^3 = 4$ substitutions (p_1, p_2, p_3) relatives au degré 6. Il vient en posant $w = [x^5 x]$:

$$(9) \quad \begin{cases} [x^4 x^2] = 2 w - [v x] & , & [(x^3 x^2) x] = -2 w + 2 [v x] & , \\ [(x^2 x^2) x^2] = 0 & , & [((x^2 x^2) x) x] = -4 [v x] & . \end{cases}$$

Par suite :

THÉOREME 11. — Dans un anneau à cubes uniques, de caractéristique première à 2, les commutateurs de degré 5 sont proportionnels à $v = [x^4 x]$ et les commutateurs de degré 6 s'expriment, linéairement, au moyen de $[x^5 x]$ et de $[v x]$. Dans les deux cas, les coefficients, non nuls, sont de la forme $\pm 2^n$.

30. — Exemple.

Ainsi on obtient seulement des relations linéaires entre les commutateurs de degré supérieur à 4. D'après le théorème 9 (partie 2^o), ces commutateurs ne sont pas nuls

en général. L'exemple suivant montre que la coïncidence des puissances principales (suggérée par le corollaire 4) s'arrête bien, *en général*, au degré 4.

TABLE II

	a	a^2	a^3	a^4
a	a^2	a^3	a^4	a^4
a^2	a^3	$-4 a^4$	$2 a^4$	0
a^3	a^4	$-2 a^4$	0	0
a^4	$-a^4$	0	0	0

Cette algèbre, sur un anneau B quelconque, est à cubes uniques.

En effet, si $x = \sum_{i=1}^4 \xi_i a^i$ on a :

$$x^2 = \xi_1^2 a^2 + 2 \xi_1 \xi_2 a^3 + 2 (\xi_1 \xi_3 - 2 \xi_2^2) a^4, \quad x^3 x = \xi_1^3 a^3 - 2 \xi_1^2 \xi_2 a^4 = x x^2.$$

Cependant $a^4 = a a^4 \neq a^4 a = -a^4$. (Si B est de caractéristique première à 2.)

Remarque. — Cette algèbre du 4^{ème} ordre sans élément unité est nécessairement au plus de degré 5 (à gauche et à droite) - (Deuxième Partie, § 41). Effectivement, on a par exemple :

$$x^5 = -\xi_1 x^4,$$

relation de degré 5 à droite. Nous verrons qu'il est impossible (si la caractéristique est première à 2) que cette algèbre soit de degré inférieur à 5 (à gauche ou à droite) - (d'après le corollaire 4 et le théorème 17 de la Deuxième Partie).

31. — Anneaux tels que $x^3 = x^3$ et $x^5 = x^5$.

1° Si la caractéristique est première à 2, en tenant compte des équations (8) et (9) où $v = 0$ et en appliquant les équations (6) au degré 7, il vient :

$$(10) \left\{ \begin{array}{l} [x^5 x^2] = 2 [x^6 x] - [wx], \\ [x^4 x^3] = 2 [x^6 x] + [(x^4 x^2)x] - 2 [wx], \\ [(x^3 x^3)x] = -4 [x^6 x] - 2 [(x^4 x^2)x] + 4 [wx], \\ [(x^3 x^2)x^2] = 2 [((x^3 x^2)x)x] + 2 [wx], \\ [(x^2 x^2)x^3] = -4 [((x^3 x^2)x)x] - 4 [wx], \\ [((x^2 x^2)x)x^2] = 2 [(((x^2 x^2)x)x)x], \\ [((x^2 x^2)x^2)x] = -4 [((x^3 x^2)x)x] - 2 [(((x^2 x^2)x)x)x] - 4 [wx]. \end{array} \right.$$

Par suite :

THÉOREME 12. — Dans un anneau de caractéristique première à 2 et tel que $x^3 = x^3$ et $x^5 = x^5$:

1° Les commutateurs de degré inférieur à 7 sont nuls sauf $[x^4x^2] = [x(x^3x^2)] = 2[x^5x]$.

2° Les commutateurs de degré 7 s'expriment au moyen de 4 d'entre eux et de $[x^5x]$ par des formules linéaires dont les coefficients sont $\pm 2^n$.

2° Outre (I_3) on a l'équation :

$$(I_5) \quad S_d(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) - S_g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 0.$$

La substitution $(2, 1, 1, 1, 1)$ donne $3w = 3[x^5x] = 0$. Puis les $p_7^2 = 2$ substitutions $(3, 1, 1, 1, 1)$ et $(2, 2, 1, 1, 1)$ donnent respectivement si $w = 0$:

$$3[(x^4x^2)x] = 3[((x^3x^2)x)x],$$

$$3[((x^2x^2)x)x] = -6[(x^4x^2)x] - 12[x^5x]$$

en plus des relations (10). Si l'on suppose seulement la caractéristique première à 2, l'équation $3a = 0$ n'entraîne pas toujours $a = 0$. Supposons donc la caractéristique première à 6 alors les équations précédentes et les équations (10) donnent en posant $X = [x^6x]$ et $U = [x^4x^3]$:

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} [x^6x] = X, \quad [x^5x^2] = 2X, \quad [x^4x^3] = U, \quad [(x^4x^2)x] = -2X + U, \\ [(x^3x^3)x] = -2U, \quad [(x^3x^2)x^2] = -4X + 2U, \\ [(x^2x^5)x^3] = 8X - 4U, \quad [(x^3x^2)x] = -2X + U, \\ [(x^2x^2)x^3] = 8X, \quad [(x^2x^2)x]x^2 = -4U, \\ [((x^2x^2)x)x] = -2U. \end{array} \right.$$

THÉOREME 13. — Si dans un anneau tel que $x^3 = x^3$ et $x^5 = x^5$ la caractéristique est première à 6, les commutateurs de degré inférieur à 7 sont nuls et les commutateurs de degré 7 s'expriment au moyen de 2 d'entre eux (par exemple $[x^6x]$ et $[x^4x^3]$) par des combinaisons linéaires dont les coefficients sont $\pm 2^n$.

32. — Exemple.

Les conditions du théorème étant vérifiées, si $x^7 = x^7$ tous les commutateurs de degré 7 sont nuls ou proportionnels à $U = [x^4x^3]$ les coefficients de proportionnalité étant donnés par les relations (11) où $X = 0$. D'après le théorème 9 (partie 2°), U , en général, n'est pas nul. Voici un exemple d'anneau, à puissances principales uniques, où U est différent de zéro.

Nous prenons comme base :

$$a_1 = a, \quad a_2 = a^2, \quad a_3 = a^3, \quad a_4 = a^4, \quad a_5 = a^2a^2, \quad a_6 = a^5, \quad a_7 = a^3a^2, \quad a_8 = a^4a^2,$$

L'algèbre est (sur un anneau B quelconque) définie par la table :

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
a_1	a_2	a_3	a_4	a_6	$-2 a_7$	0	a_8	0
a_2	a_3	a_5	a_7	a_8	0	0	0	0
a_3	a_4	a_7	$-2 a_8$	0	0	0	0	0
a_4	a_6	a_8	a_6	0	0	0	0	0
a_5	$-2 a_7$	0	$-4 a_6$	0	0	0	0	0
a_6	0	0	0	0	0	0	0	0
a_7	a_8	$2 a_6$	0	0	0	0	0	0
a_8	a_6	0	0	0	0	0	0	0

TABLE III

Remarque I. — Il est évident que dans une algèbre A ayant une base finie les expressions des coordonnées de tout élément yz (y et z étant des éléments arbitraires de A), sont complètement déterminées par les axiomes *généraux* des anneaux A et B et par la table de multiplication de A ; des hypothèses supplémentaires faites sur B ne pouvant que simplifier, éventuellement, ces expressions.

D'après cela, il suffit, pour montrer que l'algèbre III (c'est-à-dire l'algèbre définie par la table III) est à puissances principales uniques, de *supposer que B est de caractéristique zéro*. En effet si, avec cette seule hypothèse, on montre qu'une coordonnée $f(\xi_i)$ d'un commutateur, où f est un polynôme par rapport aux ξ_i dont les coefficients sont des polynômes par rapport aux constantes de structure, est nulle, la propriété subsiste quand on calcule sur les constantes de structure ou sur certaines d'entre elles modulo un entier quelconque.

Seuls les termes en a_6 altèrent la commutativité de la table III. Pour démontrer une relation de la forme $ab = ba$ il suffit donc de constater l'égalité des 6^{èmes} coordonnées. Il vient ainsi $x^3 = x^3$, $x^5 = x^5 \neq 0$. On a ensuite $x^6 = x^6 = 0$. D'où $x^n = x^n$ pour $n > 5$.

L'algèbre est donc bien à puissances principales uniques. Cependant $[a^4 a^3] = a_6 \neq 0$.

Remarque II. — D'après les relations $x^5 \neq 0$, $x^6 = 0$, l'algèbre est du 6^{ème} degré à gauche et à droite (§ 45, Deuxième Partie) pourvu que B soit un domaine d'intégrité.

33. — Commutateurs de degré 8.

D'après le théorème 13 pour que, dans un anneau de caractéristique première à 6, les commutateurs de degré inférieur à 8 soient nuls, il faut et il suffit que l'on ait :

$$12) \quad x^3 = x^3, \quad x^5 = x^5, \quad x^7 = x^7, \quad x^4 x^3 = x^3 x^4.$$

Nous allons chercher les conséquences de ces relations sur les commutateurs de degré 8. Pour condenser les résultats, nous posons :

$$\begin{aligned}
 Y_1 &= [x^7x] & Y_2 &= [x^6x^2] & Y_4 &= [(x^5x^2)x] & Y_{10} &= [((x^4x^2)x)x] \\
 & & Y_3 &= [x^5x^3] & Y_5 &= [(x^4x^3)x] & Y_{11} &= [((x^3x^3)x)x] \\
 & & 0 &= [x^4x^4] & Y_6 &= [(x^4x^2)x^2] & Y_{12} &= [((x^3x^2)x^2)x] \\
 & & & & Y_7 &= [(x^3x^3)x^2] & Y_{13} &= [((x^3x^2)x)x^2] \\
 & & & & Y_8 &= [(x^3x^2)x^3] & Y_{14} &= [((x^2x^2)x^3)x] \\
 & & & & Y_9 &= [(x^2x^2)x^4] & Y_{15} &= [((x^2x^2)x^2)x^2] \\
 & & & & & & 0 &= [(x^2x^2)(x^2x^2)] \\
 & & & & & & Y_{16} &= [((x^2x^2)x)x^3] \\
 & & Y_{17} &= [(((x^2x^2)x)x)x] & Y_{21} &= [((((x^2x^2)x)x)x)x]. \\
 & Y_{18} &= [(((x^2x^2)x^2)x)x] \\
 & Y_{19} &= [(((x^2x^2)x)x^2)x] \\
 & Y_{20} &= [(((x^2x^2)x)x)x^2]
 \end{aligned}$$

Les commutateurs sont disposés en colonnes d'après la longueur des puissances de x , la $p^{\text{ème}}$ colonne renfermant les commutateurs des puissances de longueur p . En outre, ils sont ordonnés suivant une ordination naturelle (§ 6).

Les linéarisations des équations (12) sont de la forme :

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} S_d(x_i) - S_g(x_i) = 0, \\ \text{avec } i = 1, 2, 3; \quad \text{puis } i = 1, \dots, 5; \quad \text{puis } i = 1, \dots, 7 \quad \text{et} \\ \sum_{7 \times 5} [S_d(x_h, \dots, x_i) S_d(x_j, \dots, x_k)] = 0 \end{array} \right.$$

Si on suppose seulement la caractéristique première à 2, les trois dernières relations (13) donnent des relations de la forme :

$$3u = 0 \quad \text{et} \quad 3 \times 5u = 0$$

qui ne peuvent être simplifiées, en général. Dans ce cas, c'est seulement des équations fournies par la première équation (13) qu'on peut tirer certains des commutateurs en fonction des autres et nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 Y_2 &= 2Y_1, & Y_3 &= 2Y_1 + Y_4, & Y_5 &= -2Y_1 - Y_4, & Y_6 &= 2Y_{10} \\
 Y_7 &= -2Y_{12} - 4Y_{17}, & Y_8 &= Y_{12} + 2Y_{17}, & Y_9 &= -4Y_{10} \\
 Y_{11} &= -Y_{13} - 2Y_{17}, & Y_{13} &= 2Y_{17}, & Y_{14} &= -4Y_{10} - Y_{19} - 2Y_{21} \\
 Y_{15} &= 0, & Y_{16} &= Y_{10} + 2Y_{21}, & Y_{18} &= 0, & Y_{20} &= 2Y_{21}
 \end{aligned}$$

en fonction des 7 commutateurs $Y_1, Y_4, Y_{10}, Y_{12}, Y_{17}, Y_{19}, Y_{21}$.

Si on suppose seulement la caractéristique première à 6, les linéarisations des deux dernières équations (13) donnent des résultats de la forme :

$$5u = 0.$$

Donc, dans ce cas, seules les deux premières équations (13) donnent des équations qui peuvent se résoudre par rapport à certains commutateurs. On obtient :

$$\begin{aligned} Y_2 &= 2Y_1, & Y_4 &= -2Y_1 + Y_3, & Y_5 &= -Y_3, & Y_6 &= -4Y_1 + 2Y_3, \\ Y_7 &= -2Y_3, & Y_9 &= 8Y_1 - 4Y_3, & Y_{10} &= -2Y_1 + Y_3, & Y_{11} &= -Y_3, \\ Y_{12} &= 4Y_1 - Y_3, & Y_{13} &= -4Y_1 + 2Y_3, & Y_{14} &= -2Y_3, & Y_{15} &= 0, \\ Y_{16} &= 8Y_1 - 4Y_3 - 2Y_5, & Y_{17} &= -2Y_1 + Y_3, & Y_{18} &= 0, & Y_{19} &= 0, \\ Y_{20} &= 8Y_1 - 4Y_3 - 2Y_5, & Y_{21} &= 4Y_1 - 2Y_3 - Y_5; \end{aligned}$$

en fonction des 3 commutateurs Y_1, Y_3, Y_5 .

Enfin, si la caractéristique est première à 30, il vient :

$$\begin{aligned} Y_1 &= 0, & Y_2 &= 0, & Y_4 &= Y_3, & Y_5 &= -Y_3, & Y_6 &= 2Y_3, & Y_7 &= -4Y_3, \\ Y_8 &= 2Y_3, & Y_9 &= -4Y_3, & Y_{10} &= Y_3, & Y_{11} &= -2Y_3, & Y_{12} &= -2Y_3, \\ Y_{13} &= 4Y_3, & Y_{14} &= 4Y_3, & Y_{15} &= 0, & Y_{16} &= -8Y_3, & Y_{17} &= 2Y_3, \\ Y_{18} &= 0, & Y_{19} &= 0, & Y_{20} &= -8Y_3, & Y_{21} &= -4Y_3. \end{aligned}$$

Par suite :

THÉOREME 14. — *Si dans un anneau tous les commutateurs de degré inférieur à 8 sont nuls et si la caractéristique est première à 2, les commutateurs de degré 8 s'expriment au moyen de 7 d'entre eux. Si la caractéristique est première à 6, il suffit de 3 commutateurs pour exprimer tous les autres. Enfin, si la caractéristique est première à 30, ils sont tous proportionnels à l'un d'eux, convenablement choisi, par exemple $[x^5x^3]$. Dans tous les cas les coefficients sont $\pm 2^n$.*

COROLLAIRE 5. — *Pour que dans un anneau de caractéristique première à 30 tous les commutateurs de degré inférieur à 9 soient nuls, il faut et il suffit que l'on ait :*

$$(14) \quad [x^{2n}x] = [x^kx^3] = 0, \quad (n = 1, 2, 3; \quad k = 4, 5).$$

34. — Commutateurs de degré 9.

Il est intéressant de pousser l'étude des commutateurs jusqu'au degré 9 car cela permet de construire un anneau à puissances principales commutatives qui n'est pas à puissances commutatives et cela montre que la propriété des commutateurs de s'exprimer en fonction de certains d'entre eux par des formes linéaires à coefficients (ou coordonnées des commutateurs) $\pm 2^n$, n'est pas absolument générale.

Nous cherchons les conséquences des relations (14) sur les commutateurs de degré 9.
Nous posons, en disposant les commutateurs comme précédemment (§ 33) :

$$\begin{array}{llll}
 Z_1 = [x^8x] & Z_2 = [x^7x^2] & Z_5 = [(x^6x^2)x] & Z_{14} = [((x^5x^2)x)x] \\
 & Z_3 = [x^6x^3] & Z_6 = [(x^5x^3)x] & Z_{15} = [((x^4x^3)x)x] \\
 & Z_4 = [x^5x^4] & Z_7 = [(x^5x^2)x^2] & Z_{16} = [((x^4x^2)x^2)x] \\
 & & Z_8 = [(x^4x^4)x] & Z_{17} = [((x^4x^2)x)x^2] \\
 & & Z_9 = [(x^4x^3)x^2] & Z_{18} = [((x^3x^3)x^2)x] \\
 & & Z_{10} = [(x^4x^2)x^3] & Z_{19} = [((x^3x^3)x)x^2] \\
 & & Z_{11} = [(x^3x^3)x^3] & Z_{20} = [((x^3x^2)x^3)x] \\
 & & Z_{12} = [(x^3x^2)x^4] & Z_{21} = [((x^3x^2)x^2)x^2] \\
 & & Z_{13} = [(x^2x^2)x^5] & Z_{22} = [(x^3x^2)(x^2x^2)] \\
 & & & Z_{23} = [((x^3x^2)x)x^3] \\
 & & & Z_{24} = [((x^2x^2)x^4)x] \\
 & & & Z_{25} = [((x^2x^2)x^3)x^2] \\
 & & & Z_{26} = [((x^2x^2)x^2)x^3] \\
 & & & Z_{27} = [((x^2x^2)x)x^4] \\
 \\
 Z_{31} = [(((x^4x^2)x)x)x] & Z_{41} = [((((x^3x^2)x)x)x)x] & Z_{49} = [((((((x^2x^2)x)x)x)x)x)] \\
 Z_{29} = [(((x^3x^3)x)x)x] & Z_{42} = [((((x^2x^2)x^2)x)x)x] \\
 Z_{30} = [(((x^3x^2)x^2)x)x] & Z_{43} = [((((x^2x^2)x)x^3)x)x] \\
 Z_{31} = [(((x^3x^2)x)x^2)x] & Z_{44} = [((((x^2x^2)x)x)x^2)x] \\
 Z_{32} = [(((x^3x^2)x)x)x^2] & Z_{45} = [((((x^2x^2)x)x)x)x^2] \\
 Z_{33} = [(((x^2x^2)x^3)x)x] \\
 Z_{34} = [(((x^2x^2)x^2)x^2)x] \\
 Z_{35} = [((x^2x^2)(x^2x^2))x] \\
 Z_{36} = [(((x^2x^2)x^2)x)x^2] \\
 Z_{37} = [(((x^2x^2)x)x^3)x] \\
 Z_{38} = [(((x^2x^2)x)x^2)x^2] \\
 Z_{39} = [((x^2x^2)x)(x^2x^2)] \\
 Z_{40} = [(((x^2x^2)x)x)x^3]
 \end{array}$$

Comme précédemment, il y a plusieurs cas à envisager, suivant les hypothèses faites sur la caractéristique. Si la caractéristique est première à 2, pour tirer des équations certains commutateurs en fonction des autres, on ne peut se servir que des $P_9^3 = 29$ équations conséquences de $x^3 = x^3$: tous les commutateurs seront exprimés en fonction de 17 d'entre eux. Si la caractéristique est première à 6 on a, à sa disposition, $p_9^3 + p_9^5 = 37$ équations : il reste 9 commutateurs indépendants. Si la caractéristique est première à 30, $p_9^3 + p_9^5 + 2 p_9^7 = 41$ équations sont utilisables et les commutateurs sont exprimables en fonction de 5 d'entre eux. Enfin si la caractéristique est première à $2 \times 3 \times 5 \times 7 = 210$ la linéarisation de $[x^5 x^3] = 0$ fournit 1 équation de plus : tous les commutateurs sont des combinaisons linéaires de 4 d'entre eux.

En effet, comme pour les commutateurs de plus faible degré, et ainsi qu'il a été annoncé (§ 27), chaque système (S) provenant de la linéarisation d'une relation de commutation est composé d'équations linéairement indépendantes sur [1] et de plus l'ensemble des systèmes (S) (avec la restriction que ces systèmes proviennent de relations indépendantes) forme un système (Σ) jouissant de cette même propriété d'indépendance de ses équations. De plus (Σ) est résoluble sur [1].

Les résultats obtenus sont indiqués respectivement dans les tableaux I, II, III, IV ci-après. Dans la première colonne, les nombres sont les indices des Z dont les coordonnées sont indiquées sur la ligne correspondante, les indices de ces coordonnées étant les nombres de la première ligne. Si une coordonnée est nulle, la case correspondante est vide. (Voir pages suivantes)

THÉOREME 15.—Si dans un anneau tous les commutateurs de degré inférieur à 9 sont nuls et si la caractéristique est première au produit des p premiers nombres premiers, on peut trouver m commutateurs au moyen desquels les autres s'expriment linéairement. On a :

$$1^{\circ} \text{ si } p = 2, \quad m = 17,$$

$$2^{\circ} \text{ si } p = 3, \quad m = 9,$$

$$3^{\circ} \text{ si } p = 4, \quad m = 5,$$

$$4^{\circ} \text{ si } p = 5, \quad m = 4;$$

dans les deux premiers cas, les coordonnées des commutateurs sont $\pm 2^n$, dans les autres deux cas les coordonnées sont soit $\pm 2^n$, soit $\pm 2^p \times 3$.

COROLLAIRE 6. — Pour que dans un anneau de caractéristique première à 210, tous les commutateurs de degré inférieur à 10 soient nuls, il faut et il suffit que l'on ait :

$$(15) \quad [x^{2n}x] = [x^k x^3] = [x^5 x^4] = [((x^4 x^3)x)x] = 0 \quad (n = 1, 2, 3, 4; \quad k = 4, 5, 6).$$

TABLEAU III
(caractéristique première à 30)

Z	1	3	4	10	15
1	1				
2	2				
3		1			
4			1		
5	— 2	1			
6		— 1	1		
7	— 4	2			
8			— 2		
9					2
10				1	
11					
12				— 1	— 2
13	8	— 4			
14	— 2	1			
15					1
16	4		— 2	1	2
17	— 4		2		— 2
18			4	— 2	
19			— 4	2	
20		2	— 2		
21	8	— 4		2	
22	16	— 8		4	
23		— 2	2	— 1	— 2
24		— 4	4	— 1	— 6
25				— 2	— 4
26	— 16	8		— 2	4
27	8		— 4	1	6
28	— 2		1		— 1
29			— 2	1	
30	4	— 2		1	
31	4	— 2		1	
32	— 4		2	— 2	— 2
33				— 1	— 2
34	— 16			— 2	— 4
35				8	16
36		8			8
37		4			4
38				— 2	— 4
39				— 4	— 8
40	8	— 4	— 4	1	2
41	— 2		1	— 1	— 1
42		4			4
43				— 1	— 2
44				— 1	— 2
45	8	— 4	— 4	2	4
46	4	— 2	— 2	1	2

TABLEAU IV
(caractéristique première à 210)

Z	1	3	4	15
1	1			
2	2			
3		1		
4			1	
5	— 2	1		
6		— 1	1	
7	— 4	2		
8			— 2	
9				2
10	— 8	4		
11				
12	8	— 4		— 2
13	8	— 4		
14	— 2	1		
15				1
16	— 4	4	— 2	2
17	— 4	2		— 2
18	16	— 8	4	
19	— 16	8	— 4	
20		2	— 2	
21	— 8	4		
22	— 16	8		
23	8	— 6	2	— 2
24	8	— 8	4	— 6
25	16	— 8		— 4
26				4
27		4	— 4	6
28	— 2		1	— 1
29	— 8	4	— 2	
30	— 4	2		
31	— 4	2		
32	12	— 8	2	— 2
33	8	— 4		— 2
34		— 8		— 4
35	— 64	32		16
36		8		8
37		4		4
38	16	— 8		— 4
39	32	— 16		— 8
40			— 4	2
41	6	— 4	1	— 1
42		4		4
43	8	— 4		— 2
44	8	— 4		— 2
45	— 8	4	— 4	4
46	— 4	2	— 2	2

35. — Exemple.

Le corollaire précédent fait intervenir un commutateur *non principal*. D'après le théorème 9 (partie 2^o) ce commutateur, *en général*, ne sera pas nul, même si les commutateurs de degré inférieur à 9 sont nuls.

L'exemple suivant montre qu'effectivement, si dans un anneau de caractéristique quelconque, les commutateurs principaux (*de degré quelconque*) sont nuls, l'anneau n'est pas forcément à puissances commutatives.

Nous prenons comme base :

$$\begin{array}{llll} a_1 = a, & a_2 = a^2, & a_3 = a^3, & a_4 = a^4, \\ a_5 = a^2 a^2, & a_6 = a^3 a^2, & a_7 = (a^2 a^2) a & a_8 = a^4 a^2, \\ a_9 = (a^3 a^2) a, & a_{10} = a^4 a^3, & a_{11} = (a^4 a^3) a, & a_{12} = ((a^4 a^3) a) a. \end{array}$$

Cette algèbre monogène, sur un anneau B *quelconque*, est définie par la table de multiplication :

TABLE IV

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}
a_1	a_2	a_3	a_4	0	a_7	a_9	$-a_8 - a_9$	$-a_{10}$	$-a_{10}$	a_{11}	0	0
a_2	a_3	a_5	a_6	a_8	$-2a_8 - 2a_9$	0	$-2a_{10}$	$2a_{11}$	0	0	0	0
a_3	a_4	a_6	0	a_{10}	$-2a_{10}$	0	$4a_{11}$	0	0	0	0	0
a_4	0	a_8	a_{10}	0	$-6a_{11}$	0	0	0	0	0	0	0
a_5	a_7	$-2a_8 - 2a_9$	$-2a_{10}$	$-6a_{11}$	$16a_{11}$	0	0	0	0	0	0	0
a_6	a_9	0	0	$-2a_{12}$	0	0	0	0	0	0	0	0
a_7	$-a_8 - a_9$	$-2a_{10}$	$4a_{11}$	$6a_{12}$	$-8a_{12}$	0	0	0	0	0	0	0
a_8	$-a_{10}$	$2a_{11}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
a_9	$-a_{10}$	0	$-2a_{12}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
a_{10}	a_{11}	$2a_{12}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
a_{11}	a_{12}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
a_{12}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Les produits d'éléments de base dont la somme des degrés est 9 sont encadrés d'un trait fort. Ces produits mis à part, la table est symétrique par rapport à sa diagonale principale. On a donc, x et y étant des éléments quelconques de a : $[xy] \in (a_{12})$.

Nous voulons montrer que cette algèbre est à puissances principales commutatives. D'après la remarque I du paragraphe 32, on peut supposer que B est de caractéristique zéro. Il suffit alors de vérifier que les 12^{èmes} coordonnées des commutateurs de la formule (14) et des commutateurs principaux de degré supérieur à 8 sont nulles.

Il vient ainsi $[x^2x] = [x^4x] = 0$. On obtient ensuite :

$$(16) \quad x^ny = yx^n = 0, \quad (n > 4, y \text{ quelconque dans } [a]).$$

En particulier :

$$(17) \quad x^5 \neq 0, \quad xx^5 = x^5x = 0.$$

Enfin $[x^4x^3] = 0$. Quant aux commutateurs principaux de degré supérieur à 7, ils sont nuls d'après (16).

Cependant $[(a^4a^3)a]a = a_{12} \neq 0$, $[a]$ n'est pas flexible.

Remarque. — D'après les équations (17), l'algèbre $[a]$ est du 6^{ème} degré à gauche et à droite (Deuxième Partie, § 45), pourvu que B soit un domaine d'intégrité.

Note. — Les algèbres définies par les tables II, III, IV ont été construites à partir des relations de commutation établies par linéarisations.

36. — Commutateurs de degré supérieur à 9.

Pour obtenir les relations entre les commutateurs de degré 10 dans un anneau où tous les commutateurs de degré inférieur à 10 sont nuls, il suffit de linéariser les relations (15). Si la caractéristique est seulement première à 2 les relations (6) fournissent 60 relations linéairement indépendantes sur $[1]$ (théorème 9, partie 1^o) entre les 95 commutateurs de degré 10.

Il est à présumer que les phénomènes observés jusqu'au degré 9 continuent au delà, c'est-à-dire que les systèmes globaux (Σ) sont constamment formés de relations linéairement indépendantes sur $[1]$ et résolubles sur $[1]$.

Dans ce cas, si l'anneau est de caractéristique première à $2 \times 3 \times 5 \times 7$, tous les commutateurs de degré 10 s'expriment en fonction de :

$$95 - (p_{10}^3 + p_{10}^5 + 2 p_{10}^7 + p_{10}^8 + 4 p_{10}^9) = 5$$

d'entre eux.

Par suite, si les commutateurs de degré 10 sont également nuls, les 207 commutateurs de degré 11 s'expriment en fonction de :

$$207 - (p_{11}^3 + p_{11}^5 + 2 p_{11}^7 + p_{11}^8 + 4 p_{11}^9 + 5 p_{11}^{10}) = 16$$

d'entre eux.

En continuant ainsi, indéfiniment, on doit obtenir (théorème 9, partie 2^o) les conditions minimales de commutation des anneaux monogènes de caractéristique zéro.

37. — *Ordination de certains ensembles d'anneaux.*

Nous avons défini (§ 11, § 12) des catégories d'anneaux qui constituent la gamme suivante :

A_1 : anneau absolument quelconque.

A_2 : anneau à cubes uniques ($x^3 = x^3$).

A_3 : anneau à puissances principales uniques ($x^n = x^n$, pour tout entier naturel n).

A_4 : anneau à puissances principales commutatives ($x^p x^q = x^q x^p$ pour tout couple p, q d'entiers naturels).

A_5 : anneau à puissances flexibles (tout $[x]$ est flexible).

A_6 : anneau à puissances commutatives (tout $[x]$ est commutatif).

A_7 : anneau à puissances associatives (tout $[x]$ est associatif).

D'après les résultats du chapitre II sur les anneaux à puissances flexibles, d'après les applications du chapitre III et d'après des remarques évidentes, nous pouvons énoncer :

THÉORÈME 16. — Si $A_i^{(2)}$ désigne un anneau A_i de caractéristique première à 2, on a schématiquement entre les catégories d'anneaux précédentes les inclusions :

$$(18) \quad \{A_1^{(2)}\} \supset \{A_2^{(2)}\} \supset \{A_3^{(2)}\} \supset \{A_4^{(2)}\} \supset \{A_5^{(2)}\} = \{A_6^{(2)}\} \supset \{A_7^{(2)}\}$$

Si on ne suppose rien sur la caractéristique ces relations se conservent sauf l'avant-dernière qui devient :

$$\{A_5\} \supset \{A_6\}$$

38. — *Conclusion.*

Ce chapitre a montré l'existence de conditions suffisantes plus faibles que la flexibilité (théorème 5) pour la commutation des anneaux monogènes. Toutefois, il ne suffit pas que les puissances principales commutent (alors qu'au contraire si les puissances principales sont associatives, il en est de même des puissances quelconques).

Le théorème 16 montre que les catégories d'anneaux qui ont été définis sont effectivement distincts (à part les anneaux à puissances flexibles et les anneaux à puissances commutatives).

DEUXIÈME PARTIE

ALGÈBRES DE DEGRÉS FINIS

CHAPITRE IV

INTRODUCTION DE DIVERS TYPES D'ALGÈBRES

Les propriétés de l'anneau B intervenant essentiellement, nous dirons *algèbre* A de préférence à *anneau* A .

Au début de ce chapitre, nous rappelons des résultats voisins de résultats classiques, mais qui, à notre connaissance, ne sont pas exposés pour des algèbres *non associatives* sur un *anneau*.

A. — ÉQUATIONS SATISFAITES PAR UN ÉLÉMENT D'UNE ALGÈBRE ADMETTANT UNE BASE FINIE

39. — *Algèbre* A ayant un élément unité e .

I. — *Equations caractéristiques.*

Soient $(e_1 = e, e_2, \dots, e_n)$ une base de A sur B et $P = B[\xi_1, \dots, \xi_n]$ l'anneau associatif, commutatif et avec élément unité, des polynômes en ξ_i ($i = 1, \dots, n$) à coefficients dans B . Soit A_P l'algèbre sur P définie par la table de multiplication des e_i qui définit A (dans la base ci-dessus). L'élément général x de A est l'élément de A_P dont les coordonnées sont $\xi_1, \dots, \xi_n$.

Avec les notations d'ALBERT {4} on a $yx = yR_x$, ($y \in A$, R_x matrice de multiplication à droite de l'élément x , avec la base indiquée). R_x satisfait à son équation caractéristique :

$$C(\lambda) = \lambda^n - t_1 \lambda^{n-1} + \dots + (-1)^i t_i \lambda^{n-i} + \dots + (-1)^n \det R_x = 0,$$

où t_i est un polynôme homogène en $\xi_1, \dots, \xi_n$ de degré total i au plus. Or on a :

$$x = ex = eR_x, \dots, x^p = eR_x^p$$

Donc si $C_d(x)$ désigne le *polynôme à droite* obtenu en remplaçant dans $C(\lambda)$ les éléments λ^p par x^p ($p = 0, \dots, n$) on a :

$$C_d(x) = e C(R_x) = 0 ,$$

par suite, en appelant *équation caractéristique à droite*, de l'élément général x , l'équation, $C_d(x) = 0$:

L'élément général x d'une algèbre (non associative) A ayant une base finie sur un anneau B , est racine de son équation caractéristique à droite.

D'une façon analogue, en considérant la matrice L_x de multiplication à gauche ($yL_x = xy$), on voit que x satisfait à son équation caractéristique à gauche $G_g(x) = 0$, le *polynôme à gauche* $G_g(x)$ étant obtenu en remplaçant μ^p par x^p ($p = 0, \dots, n$) dans le polynôme caractéristique $G(\mu)$ de L_x .

L'équation (polynôme) caractéristique à droite (gauche) de l'élément général de l'algèbre A s'appelle encore *équation (polynôme) caractéristique à droite (gauche) de l'algèbre A .*

En remplaçant les indéterminées ξ_i par les coordonnées x_i d'un élément a de l'algèbre, on obtient l'équation (polynôme) caractéristique à droite (gauche) de l'élément a ; a est racine de ses équations caractéristiques à droite et à gauche.

II. — Equations principales.

Il en résulte qu'il existe une équation à droite :

$$(1) \quad \Delta_x x^p - \Delta_{x,x} x^{p-1} - \dots - \Delta_{\underset{\leftarrow p+1 \rightarrow}{x, \dots, x}} x e = 0 \quad (m \leq n, \quad \Delta_{\underset{\leftarrow q \rightarrow}{x, \dots, x}} \in P) ,$$

telle que p soit le plus petit possible. Nous l'appelons *équation minima à droite de l'élément général* ou *équation principale* ⁽¹⁾ à droite de l'algèbre A ; p sera dit *degré à droite de l'algèbre A* . On a alors :

$$(2) \quad \Delta_x^{k+1} x^{p+k} \in (x^{p-1}, \dots, x, e) .$$

1° S'il existe une autre équation principale à droite :

$$(1') \quad \Delta'_x x^p - \Delta'_{x,x} x^{p-1} - \dots - \Delta'_{x, \dots, x} x e = 0 ,$$

en multipliant la première équation par $-\Delta'_x$ la seconde par Δ_x et en ajoutant, il vient :

$$0 = (\Delta'_x \Delta_{x,x} - \Delta_x \Delta'_{x,x}) x^{p-1} + \dots ,$$

(1) Ou encore *équation au rang, à droite, de l'algèbre A .*

les coefficients de cette équation appartenant à l'anneau P. D'après la définition de l'équation (1), ces coefficients sont tous nuls. Si $\vec{\Delta}$ et $\vec{\Delta}'$ désignent les vecteurs dont les coordonnées sont les coefficients (éventuellement changés de signe) de (1) et de (1'), on a :

$$(3) \quad \Delta'_x \vec{\Delta} = \Delta_x \vec{\Delta}'$$

Posons $\Delta_{x, \dots, x} = \Lambda$, $\Delta'_{x, \dots, x} = \Lambda'$. Si B est un domaine d'intégrité, la relation (3) peut encore s'écrire :

$$(3') \quad \Lambda' \vec{\Delta} = \Lambda \vec{\Delta}'$$

En effet, on a $\Lambda' \Delta_x = \Lambda \Delta'_x$ et, par exemple, $\Delta'_x \Delta_{x,x} = \Delta_x \Delta'_{x,x}$, en multipliant cette dernière équation par Λ et en tenant compte de la précédente, il vient :

$$\Lambda' \Delta_x \Delta_{x,x} = \Lambda \Delta_x \Delta'_{x,x}$$

d'où, puisque P est un domaine d'intégrité, la deuxième des équations (3')...

2° Dans l'équation (1) remplaçons x par λx (λ quelconque dans B). il vient :

$$\lambda^p \Delta_{\lambda x} x^p = \lambda^{p-1} \Delta_{\lambda x} \lambda x^{p-1} + \dots + \Delta_{\lambda x, \dots, \lambda x} e \quad \leftarrow p+1 \rightarrow$$

D'où, d'après l'équation (3) et si B est un domaine d'intégrité :

$$(4) \quad \Delta_x \Delta_{\lambda x} \lambda x = \lambda \Delta_{\lambda x} \Delta'_x x, \dots, \Delta_x \Delta_{\lambda x, \dots, \lambda x} = \lambda^p \Delta_{\lambda x} \Delta_{x, \dots, x} \quad \leftarrow p+1 \rightarrow$$

Ces équations sont encore vraies, B étant quelconque, pour les éléments λ inversibles dans B.

3° Supposons en particulier qu'on puisse prendre $\Delta_x = 1$. [Si B est un corps F quelconque, on peut toujours prendre $\Delta_x = 1$. En effet, dans ce cas, on définit l'équation principale à droite comme étant l'équation de plus petit degré (à droite) à coefficients dans le corps F ($\xi_1, \dots, \xi_n$) des fractions rationnelles en $\xi_1, \dots, \xi_n$, dont le coefficient de tête est 1 et qui est satisfaite par l'élément général. On montre alors d'après le lemme de GAUSS ({2}, p. 37) que ces coefficients sont dans P].

Nous écrirons alors :

$$(5) \quad P(x) = x^p - \delta_x x^{p-1} - \dots - \delta_{x, \dots, x} e = 0 \quad \leftarrow p \rightarrow$$

les relations (3) montrent que cette équation est *unique* et les relations (4) que, *dans le cas où B est un domaine d'intégrité*, $\delta_{x, \dots, x}$ est un polynôme homogène en ξ_i de degré total q (polynôme qui peut être 0) .

Si dans (1) nous remplaçons les indéterminées ξ_i par les coordonnées α_i d'un élément a de l'algèbre et x par a , nous obtenons l'équation principale à droite de a ; l'élément a est racine de son équation principale à droite.

Définitions et propriétés analogues à gauche.

III. — Equations minima.

Nous considérons dans A un élément particulier a . Cet élément satisfaisant à son équation caractéristique à droite et à son équation principale à droite, il existe une équation de la forme :

$$(6) \quad M(x) = \varepsilon_1 a^m - \varepsilon_2 a^{m-1} - \dots - \varepsilon_{p+1} e = 0 \quad (m \leq p, \varepsilon_q \in B),$$

telle que m , qui est dit *degré* de a , soit le plus petit possible. (6) est une équation minimale à droite de a . Elle satisfait à des propriétés analogues à (3) et à (3'). On a :

$$(7) \quad \varepsilon_1^{k+1} a^{m+k} \in (a^{m-1}, \dots, a, e) \quad (k \text{ nombre naturel quelconque}).$$

Si dans (6) on peut prendre $\varepsilon_1 = 1$, l'équation (6) avec ce choix particulier du coefficient de tête est unique.

Définitions et propriétés analogues à gauche.

40. — Cas où B est un corps.

Si B est un corps F en généralisant la démonstration du théorème 2 de {4} par l'introduction du corps $F(\xi_i)$, on voit que le polynôme principal à droite de A divise tout polynôme $G(\lambda)$ tel que $G_d(x) = 0$ et que le polynôme minimum à droite d'un élément a divise tout polynôme $H(\lambda)$ tel que $H_d(a) = 0$. En particulier le polynôme principal à droite de A divise le polynôme caractéristique à droite de A et le polynôme minimum à droite de l'élément a divise le polynôme principal à droite et le polynôme caractéristique à droite de a . Propriétés analogues «à gauche».

41. — Algèbre A sans élément unité.

On se ramène au cas précédent en considérant une algèbre A^+ déduite de A par l'adjonction d'un élément unité $e = e_0$: $A^+ = (e, e_1, \dots, e_n)$. On complète la table de multiplication de A relative à la base $(e_1, \dots, e_n)$ en introduisant, avec les notations habituelles :

$$\gamma_{ijo} = 0, (i, j \text{ non tous deux nuls}), \gamma_{ojk} = \delta_{jk}, \gamma_{iok} = \delta_{ik}.$$

L'élément général $x^+ = x + \xi_0 e$ satisfait à l'équation :

$$C_d^+(x^+) = x^{+(n+1)} - t_1^+ x^{+n} + \dots + (-1)^n \det R_{x^+} e = 0.$$

Il en résulte (cf. {14}) en faisant $\xi_0 = 0$ que x satisfait à l'équation :

$$C_d(x) x = 0,$$

$C(\lambda)$ désignant toujours le polynôme caractéristique de R_x . Raisonnement analogue « à gauche ».

Ainsi on a les mêmes définitions et les mêmes propriétés qu'au paragraphe 39 en y supprimant simplement les termes en λe ($\lambda \in B$) ou en Δe ($\Delta \in P$).

42. — Exemples.

Nous avons donné dans la Première Partie des exemples concrets d'algèbres, sur un anneau B d'intégrité quelconque, dont les équations principales sont respectivement du 5^{ème} degré (table II, § 30) et du 6^{ème} degré (tables III et IV, §§ 32, 35).

B. — ALGÈBRES ALGÈBRIQUES

43. — Définition. Remarques.

Une algèbre A sur un corps F est « algébrique », si toute sous-algèbre monogène de A admet une base finie sur F (§ 9 et § 20). Nous étendons cette définition aux algèbres sur un anneau B : une algèbre A sur B sera dite algébrique si toute sous-algèbre monogène $[x]$ de A est susceptible d'une base finie sur B .

Alors pour chaque sous-algèbre $[x]$ les remarques des paragraphes précédents s'appliquent : on peut définir pour chaque sous-algèbre $[x]$ l'équation caractéristique à droite de cette sous-algèbre et son équation principale à droite. Toutefois, il n'est pas possible de le faire, en général, pour l'algèbre A elle-même. En particulier, bien que toute algèbre $[x]$ ait un degré fini à droite p_x , l'ensemble des p_x n'est pas forcément borné.

Cependant tout élément a d'une algèbre algébrique a un degré m fini, à droite, puisque $m \leq p_a$.

C. — GÉNÉRALISATIONS

Si l'algèbre considérée ne contient pas d'élément unité on doit supprimer les termes en λe ($\lambda \in B$) dans les formules.

44. — Equations minima.

Dans une algèbre A quelconque considérons un élément a . S'il existe dans B des éléments ϵ_q ($q = 1, \dots, p + 1$) tels que l'équation (6) soit satisfaite et qu'il n'existe pas d'équation analogue de plus faible degré, nous dirons que l'équation (6) est l'équation minima à droite de a et que a est de degré m à droite. Ses propriétés sont celles rappelées (§ 39), en particulier on a la relation (7).

Si dans l'équation (6) on peut choisir $\epsilon_1 = 1$, nous dirons que a est du $m^{\text{ème}}$ degré à droite. L'équation (6) avec $\epsilon_1 = 1$ est alors unique.

LEMME 5. — Si l'élément a est de degré n (respectivement du $n^{\text{ème}}$ degré) à droite, tout élément $b = a + \beta e$ ($\beta \in B$) est de degré n (respectivement du $n^{\text{ème}}$ degré) à droite.

En effet, en remplaçant a par $b - \beta e$ dans l'équation (6), on obtient (la formule du binôme s'appliquant aux puissances principales) une équation dont le premier terme est $\varepsilon_1 b^n$. D'autre part b ne satisfait pas à une équation de degré moindre sinon il en serait de même de a ce qui est impossible.

DÉFINITION 6. — *Un élément a de degré n (respectivement du $n^{\text{ème}}$ degré) à droite, est dit canonique si $\varepsilon_2 = 0$.*

LEMME 6. — *Pourvu que l'algèbre contienne un élément unité et que l'équation $\varepsilon_1 n - \varepsilon_2 = 0$ soit résoluble dans B , il existe un élément $\beta = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 n}$ tel que $b = a + \beta e$ soit canonique ; b existe toujours si B est un corps de caractéristique première à n .*

Ceci résulte du lemme précédent et de l'application de la formule du binôme qui montre que le coefficient de b^{n-1} est $\varepsilon_1 n \beta - \varepsilon_2$.

Définitions et propriétés analogues « à gauche ».

45. — Définitions.

Nous posons les définitions suivantes :

DÉFINITIONS 7.

I. — *Une algèbre A est dite de degrés finis à droite si tout élément a de A a un degré m_a (fini) à droite.*

D'après le paragraphe précédent, toute algèbre algébrique est de degrés finis à droite.

II. — *Une algèbre A est dite de degré principal (fini) d à droite si :*

1° *elle est de degrés finis à droite,*

2° *l'ensemble de tous les nombres m_a est borné et le plus grand des nombres m_a est d .*

Une telle algèbre est dite *algèbre de degré borné*.

S'il existe au moins un élément a tel qu'on ne puisse choisir son coefficient ε_1 égal à 1 l'algèbre sera dite de degré principal *impropre* d ; sinon on supprimera le mot « impropre ». Nous sous-entendons quelquefois le mot « principal ». Au contraire si A est à puissances principales uniques, nous dirons « degré principal » pour « degré principal à droite ».

Dans une algèbre quelconque de degrés finis à droite, d n'existe pas forcément (§ 43).

III. — *Une algèbre A est dite du $p^{\text{ème}}$ degré à droite si à tout élément x de A on peut faire correspondre des éléments $\delta_{x, \dots, x}$ de B ($q = 1, \dots, p$) satisfaisant aux propriétés suivantes :*

1° *L'équation (5) est vérifiée,*

2° *La fonction $\delta_{x, \dots, x}$ ($q = 1, \dots, p$) satisfait aux propriétés combinatoires formelles P_q communes aux polynômes homogènes de degré q (à plus de $p - 1$ variables) sur un domaine d'intégrité D quelconque. Nous dirons pour simplifier que cette fonction est un « coefficient de degré q » en x .*

Appelons C une combinaison linéaire sur $[1]$ de « coefficients de degré q » dont les arguments seuls diffèrent. Les propriétés combinatoires P_q invoquées sont de la nature suivante :

- a) annulation de C ;
- b) non dépendance de C vis-à-vis d'un argument x ;
- c) linéarité en x de C : $C(x + x') = C(x) + C(x')$, $C(\lambda x) = \lambda C(x)$ ($\lambda \in \mathbf{D}$) ;
- d) mise en facteur, dans C , d'un coefficient dans $[1]$.

3° Il n'existe pas d'équation analogue à (1) (avec « des coefficients de degré q ») de degré inférieur à p .

Cette relation dite *équation principale à droite* de A est unique. En effet, s'il existait une autre équation :

$$(5') \quad x^p - \delta'_x x^{p-1} - \delta'_{x,x} x^{p-2} - \dots - \delta'_{x, \dots, x} e = 0 \quad ,$$

$\leftarrow p \rightarrow$

par soustraction, on obtiendrait :

$$(\delta_x - \delta'_x) x^{p-1} + (\delta_{x,x} - \delta'_{x,x}) x^{p-2} + \dots = 0 \quad ,$$

les expressions entre parenthèses étant des coefficients de degré q ; mais d'après la condition 3° une telle relation est impossible.

Exemples. — Toute algèbre ayant une base finie sur un corps est du $n^{\text{ème}}$ degré à droite.

La table II (§ 30) définit une algèbre de degré 5 au plus sur un anneau B quelconque.

Les tables III et IV (§ 32, § 35) définissent des algèbres du 5^{ème} et du 6^{ème} degré sur un anneau B d'intégrité quelconque.

Considérons en effet une algèbre A quelconque, ayant une base sur un domaine d'intégrité B , telle que pour tout x de A on ait $x^n = 0$ et contenant au moins un élément a pour lequel on ait $a^{n-1} \neq 0$. Alors A est du $n^{\text{ème}}$ degré à droite. Sinon a satisferait à une relation $\sum_{i=r}^{n-1} \alpha_{n-i} a^i = 0$ ($0 \leq r < n$, $\alpha_{n-r} \neq 0$) et il en résulterait par multiplications successives à droite par a $\alpha_{n-r} a^{n-1} = 0$, d'où (A ayant une base sur le domaine d'intégrité B) $a^{n-1} = 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Les définitions et les résultats analogues « à gauche » sont évidents.

Les algèbres de degrés finis seront utilisées principalement dans la Troisième Partie. L'étude des algèbres du $n^{\text{ème}}$ degré sera faite dans cette Seconde Partie en relation avec les résultats de la Première Partie sur les anneaux monogènes.

46. — Puissances non principales.

Une théorie analogue pourrait être développée pour des puissances non principales successives de « formes » {17} déterminées, par exemple pour les puissances *pleines* {18}, p. 246) qui sont : $x, x^2, (x^2)^2, ((x^2)^2)^2 \dots$ etc...

47. — *Notations.*

La seule puissance principale de degré 2 étant 2, si une algèbre est de degré principal (impropre ou non) 2 à droite (gauche), nous dirons simplement algèbre de degré (impropre ou non) 2. Signification analogue pour le terme : algèbre du second (ou 2^{ème}) degré.

De même pour une algèbre de degré 3 à droite (gauche) il ne peut s'agir que du degré principal.

CHAPITRE V

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES

A partir de ce chapitre, nous énoncerons uniquement les faits relatifs aux puissances à droite, les faits relatifs aux puissances à gauche s'en déduisant d'une façon évidente.

A. — PROPRIÉTÉS SE DÉDUISANT DIRECTEMENT D'UNE ÉQUATION DU $n^{\text{ème}}$ DEGRÉ

48. — *Coincidence des puissances principales.*

THÉORÈME 17. — *Si un élément a est du $n^{\text{ème}}$ degré à droite et si les puissances principales de a coïncident jusqu'au degré n (inclus) alors elles coïncident pour tout degré.*

Cela résulte immédiatement de la relation (7) — § 39 — où $\epsilon_1 = 1$.

49. — *Cas d'associativité des puissances.*

THÉORÈME 18. — *Si un élément a est du $n^{\text{ème}}$ degré à droite et si $a^p a^q = a^{p+q}$ p et q étant des entiers rationnels quelconques de l'intervalle $(0, n)$ bornes exclues, alors $[a]$ est associatif et commutatif.*

En effet la relation $a^{k-q} a^q = a^k$ ($0 < q < k$) est évidente jusqu'à $k = 2n - 2$, supposons-la démontrée jusqu'à $k = m$. Puisqu'on peut supposer $m + 1 \geq 2n - 1$, on a soit $q \geq n$, soit $m + 1 - q \geq n$. Supposons par exemple $q \geq n$. On veut montrer $a^{m+1-q} a^q = a^{m+1}$. Alors :

$$a^q = a^{q-n+n} = \alpha_1 a^{q-1} + \dots + \alpha_n a^{q-n}, \quad (\alpha_1, \dots, \alpha_n \in B),$$

$$a^{m+1-q} a^q = \alpha_1 a^m + \dots + \alpha_n a^{m-n} = a^{m+1}.$$

Et l'associativité de l'anneau monogène $[a]$ résulte évidemment de celle des puissances de a .

COROLLAIRE 7. — 1° Toute algèbre de degré 2 est à puissances associatives.

2° Pour qu'une algèbre A de degré 3 à droite soit à puissances associatives, il faut et il suffit que l'on ait $xx^2 = x^2x$ et $x^2x^2 = x^4$ pour tout x de A.

3° Dans une algèbre C de degré 4 à droite, pour que $[a]$ soit associative il faut et il suffit que l'on ait : $aa^2 = a^2a$, $aa^3 = a^3a$, $a^2a^2 = a^4$, $a^2a^3 = a^3a^2 = a^5$, $a^3a^3 = a^6$.

C'est en effet une application directe du théorème 18 (la relation $x^px^q = x^{p+q}$ est toujours vérifiée si $p + q < 3$).

COROLLAIRE 8. — Pour qu'une algèbre C de degré 4 à droite et de caractéristique première à 6 soit à puissances associatives, il faut et il suffit que l'on ait $xx^2 = x^2x$ et $x^2x^2 = x^4$ pour tout x de C.

En effet, pourvu que la caractéristique soit première à 2, $xx^2 = x^2x$ entraîne $xx^3 = x^3x$ (corollaire 4), ces deux relations entraînent (théorème 17) $xx^4 = x^4x$. On a alors, d'après la formule (8) (§ 29) $x^3x^2 = x^2x^3$ et aussi, puisque $x^4 \in (x^3, x^2, x, e)$, $x^4x^2 = x^2x^4$.

La linéarisation de $x^2x^2 = x^4$ est évidemment (formules (1), (2) et (3) du chapitre III) :

$$(L) \quad S_d(x_h, x_i) S_d(x_j, x_k) = S_d(x_1, x_2, x_3, x_4) .$$

En faisant dans (L) la substitution (2, 1, 1, 1) et en tenant compte des résultats ci-dessus, il vient $2 \times 6 x^3x^2 = 2 \times 6 x^5$. D'où puisque la caractéristique est première à 6 : $x^3x^2 = x^5$. La substitution (3, 1, 1, 1) donne dans les mêmes conditions $x^4x^2 = x^6$, résultat qui, introduit dans la substitution (2, 2, 1, 1) donne $x^3x^3 = x^6$. Les conditions du corollaire 7 (partie 3°) sont alors satisfaites pour tout x .

Remarque. — A.-A. ALBERT [7] a montré que les conditions $xx^2 = x^2x$ et $x^2x^2 = x^4$ entraînaient l'associativité des puissances dans un anneau de caractéristique zéro. Les conditions sur la caractéristique sont ici beaucoup plus faibles.

B. — LINÉARISATION

50. — Linéarisation de l'équation principale.

Soit A une algèbre du $n^{\text{ème}}$ degré à droite, à tout élément x de A nous pouvons faire correspondre des éléments $\delta_x \dots x$ ($q = 1, \dots, n$) qui soient des « coefficients de degré q » (§ 45, définition III, condition 2°) et tels que l'on ait :

$$(E_n) \quad x^n = \delta_x x^{n-1} + \delta_{x,x} x^{n-2} + \dots + \delta_{x, \dots, x} e .$$

Soient x_i ($i=1, \dots, n$) des éléments arbitraires de A. Dans (E_n) faisons les substitutions suivantes :

- 1°/ $x = x_1 + \dots + x_n$;
- 2°/ $x = x_1 + \dots + x_n - x_h$ en prenant successivement $h = 1, h = 2, \dots, h = n$;

$$q^0/ \quad x = x_1 + \dots + x_n - (x_h + x_i + \dots + x_k) \quad (h < i \dots < k = q, \dots, n) ;$$

$$\dots \dots \dots$$

$$n^0/ \quad x = x_1, \text{ puis } x = x_2, \dots, \text{ puis } x = x_n .$$

Multiplions les $q^{\text{èmes}}$ substitutions par $(-1)^{q-1}$ ($q = 1, \dots, n$) et ajoutons toutes les relations obtenues. D'après la formule (1) du paragraphe 16 où l'on fait $p(n) = n$ le premier membre de la relation ainsi obtenue est $S_d(x_1, \dots, x_n)$.

Etudions le second membre. Il est une somme [à coefficients combinaisons ± 1 de fonctions δ ayant le même nombre r d'indices ($r = 1, \dots, n$)] de monôme qui sont des produits à droite de puissances des x_i . Or tous les monômes de degré donnés p_1 en $x_1, \dots, p_n$ en x_n avec $\sum p_i = p$ (si $p_j = 0$, le terme en x_j , par convention manque) ont le même coefficient, car chacun de ces monômes figure une fois et une fois seulement dans le développement de la $p^{\text{ème}}$ puissance de la somme contenant ceux des x_i qui figurent effectivement dans le monôme. On peut donc, pour l'étude des coefficients, se borner à considérer les produits où les puissances de x_i ($i = 1, \dots, n$) sont groupées. De plus, la loi de formation étant symétrique par rapport aux indices, si un produit X se déduit d'un produit Y par une certaine permutation des indices, le coefficient de X se déduit de celui de Y par la même permutation des indices. On peut donc se borner à étudier le coefficient $C_{p_1, p_2, \dots, p_n}$, du produit $(\dots(x_1^{p_1} x_2^{p_2} \dots) x_n^{p_n})$. Comme on a $p \leq n-1$ on peut supposer $p_n = 0$.

I — L'algèbre A admet une base finie sur un domaine d'intégrité D .

Le « coefficient de degré q » est donc un polynôme homogène de degré q par rapport aux coordonnées de x . Nous allons montrer que le calcul des coefficients C se ramène essentiellement à sommer les coefficients du binôme qui intervenaient déjà dans la démonstration du théorème 6.

A) Pour plus de clarté nous allons étudier d'abord les coefficients des termes de degré $n-1$. On a dans ce cas $\sum p_i = n-1$.

1° $p_1 = \dots = p_{n-1} = 1$. Le coefficient est :

$$\delta_{x_1 + \dots + x_n} - \delta_{x_1 + \dots + x_{n-1}} = {}^0x_n$$

2° $p_{n-m+1} = \dots = p_{n-1} = 0$, les autres puissances ne sont pas nulles. Introduisons la convention suivante : si dans une somme les indices $h, \dots, k$ manquent on notera cette somme par $\sum_{\check{h}, \dots, \check{k}}$. Posons $n-m+1 = s$. Le coefficient d'un des produits envisagés est :

$$(1) \quad \delta_{\sum x_p} - \sum_{h=s, \dots, n} \delta_{\sum_{\check{h}} x_p} + \dots$$

$$\dots + (-1)^{q-1} \sum_{\substack{h, \dots, k=s, \dots, n \\ \leftarrow q-1 \rightarrow}} \delta_{\sum_{\check{h}, \dots, \check{k}} x_p} + \dots + (-1)^m \delta_{\sum_{s, \dots, n} x_p}$$

En vertu de la linéarité (remarquons que la démonstration est ici directement valable pour le cas général), les arguments (ou indices) des δ se composent comme ces

fonctions elles-mêmes. Il est commode pour évaluer cette somme algébrique $Z = \sum x_p - \dots$ d'introduire les dérivations formelles par rapport aux x_i . On a :

$$\frac{\partial Z}{\partial x_1} = 1 - C_m^1 + \dots + (-1)^{q-1} C_m^{q-1} + \dots + (-1)^m C_m^m = 0.$$

Il en résulte que Z ne dépend pas de x_1 ni, pour la même raison, de $x_2, \dots, x_{n-m}$. On a de même :

$$\frac{\partial Z}{\partial x_n} = 1 - C_{m-1}^1 + \dots + (-1)^{q+1} C_{m-1}^{q+1} + \dots + (-1)^{m-1} C_{m-1}^{m-1} = 0$$

et par suite $Z = 0$.

Nous avons démontré que les seuls termes de degré $n - 1$ étaient de la forme :

$$\delta_{x_h} S_d \{h\}$$

où $S_d \{h, i, \dots, k\}$ est la fonction S_d de celles des variables $x_1, \dots, x_n$ dont les indices ne sont ni h , ni $i, \dots$, ni k . Il suffit en effet de rassembler les produits de coefficient δ_{x_h} .

B) Termes de degré $n - r$ ($r > 1$). Supposons que les $m - 1$ derniers nombres p_i soient nuls, les autres étant différents de zéro. Nous avons $p_1 + \dots + p_{n-m} = n - r$. Nous étudions le coefficient de $(\dots (x_1^{p_1} x_2^{p_2}) \dots) x_{n-m}^{p_{n-m}}$. Ce coefficient se déduit exactement de l'expression (1) de la façon suivante : on répète r fois l'indice de chaque δ , ainsi $\delta_{\sum x_p}$ doit être remplacé par $\delta_{\sum x_p, \dots, \sum x_p}$.

Or, par hypothèse, $\delta_{\sum x_p, \dots, \sum x_p}$ est une somme (finie), à coefficients dans D , de produits de la forme $\xi_{j_1} \xi_{j_2} \dots \xi_{j_r}$, les indices j variant, séparément depuis 1 jusqu'à l'ordre de l'algèbre. Pour étudier une combinaison linéaire de ces δ il suffit donc d'étudier la même combinaison relative à chacun de ces produits. Nous désignons par ξ_{ij} les coordonnées de x_i ($i = 1, \dots, n$). L'expression à considérer est donc :

$$\begin{aligned} T &= (\sum \xi_{ij_1}) (\sum \xi_{ij_2}) \dots (\sum \xi_{ij_r}) - \sum_{h=s, \dots, n} \sum_{\check{h}} (\sum \xi_{ij_1}) \dots (\sum \xi_{ij_r}) + \dots \\ &\dots + (-1)^{q-1} \sum_{h, \dots, k=s, \dots, m} \sum_{\check{h}, \dots, \check{k}} (\sum \xi_{ij_1}) \dots (\sum \xi_{ij_r}) + \dots \\ &\dots + (-1)^m \sum_{\check{s}, \dots, \check{n}} (\sum \xi_{ij_1}) \dots (\sum \xi_{ij_r}). \end{aligned}$$

T est homogène de degré r . La dérivation formelle de T par rapport à ξ_{ij_1} ($i=1, \dots, n-m$) ramène à une expression exactement analogue mais de degré $r - 1$, or pour le degré 1 on a l'expression Z qui est nulle. Donc T ne dépend pas de $\xi_{ij_1}, \dots, \xi_{ij_r}$ ($i = 1, \dots, n - m$) et par suite le coefficient $C_{p_1, \dots, p_{n-m}}$ ne dépend pas de $x_1, \dots, x_{n-m}$. La dérivation formelle de T par rapport à ξ_{sj_1} ramène à une expression exactement analogue mais où le degré r et le nombre m ont tous deux baissé de 1.

Il y a deux cas à considérer. Si $r < m$ on finit par se ramener à une expression de la forme Z et dans ce cas le coefficient C est nul. Si $r = m$ on tombe sur le cas A 1°, c'est-à-dire qu'après des dérivations successives par rapport à $\xi_{sj_1}, \dots, \xi_{n-1, j_{m-1}}$ on obtient ξ_{nj_m} . On a donc $T = \Sigma \xi_{sj_1} \dots \xi_{nj_r}$, où, au second membre, on fait les $r!$ permutations possibles des indices $j_1, \dots, j_r$. Le coefficient $\delta'_{x_s, \dots, x_n}$ de $S\{s, \dots, n\}$ est donc la somme des $r!$ fonctions $\delta_{x_s, \dots, x_n}$ en appelant $\delta_{x_s, \dots, x_n}$ la fonction qui se déduit de $\delta_{x, \dots, x}$ en changeant le produit $\xi_{j_1} \dots \xi_{j_r}$ en $\xi_{sj_1} \dots \xi_{nj_r}$. Si q des indices $s, \dots, n$ deviennent égaux, $q!$ se met en facteur dans ce coefficient. Plus particulièrement on a :

$$(2) \quad \delta'_{x, \dots, x} = r! \delta_{x, \dots, x}$$

Par exemple si D est un corps de caractéristique différente de 2, $\delta'_{x,y}$ est le double de la forme polaire de la forme quadratique δ_{xx} . Nous dirons que les δ' sont les « formes linéarisées » des δ (1).

LEMME 7. — Si une algèbre A admettant une base finie sur un domaine d'intégrité D a comme équation principale du n^{me} degré l'équation (E_n) , n éléments arbitraires $x_1, \dots, x_n$ de A satisfont à l'équation :

$$(L_n) \quad S_d(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \delta_{x_i} S_d\{i\} + \sum_{C_n^2} \delta'_{x_i, x_j} S_d\{i, j\} + \dots$$

$$\dots + \sum_{C_n^p} \delta'_{x_h, \dots, x_k} S_d\{h, \dots, k\} + \dots + \delta'_{x_1, \dots, x_n} e,$$

où $\delta'_{x_h, \dots, x_k}$ est la « forme linéarisée » de $\delta_{x_h, \dots, x_k}$. La relation (L_n) est l'unique relation linéaire, satisfaite par n éléments arbitraires de A , dont les coefficients soient des fonctions symétriques de leurs indices.

Supposons en effet qu'il existe une autre relation (L_n^*) jouissant de ces propriétés. Soustrayons et faisons $x_1 = \dots = x_n = x$, il vient $\delta'^x_{x, \dots, x} = p! \delta_{x, \dots, x}$ ($p = 1, \dots, n$), ce qui détermine complètement les fonctions symétriques δ'^x (d'indices quelconques).

Par extension de la terminologie de la Première Partie (§ 18), nous dirons que (L_n) est la linéarisation de (E_n) .

II. — Cas général.

Qu'il s'agisse de la nullité d'un coefficient C (cf. § 45, 2°-a), de la dépendance de C vis-à-vis d'un x_i (§ 45, 2°-b), de la linéarité de C en x_k (§ 45, 2°-c), ou de la mise en facteur dans C de $q!$ (§ 45, 2°-d) les propriétés du cas I se conservent par définition. Par suite :

THÉORÈME 19. — Dans une algèbre A du n^{me} degré sur un anneau B , n éléments arbitraires satisfont à la linéarisation (L_n) de l'équation principale. Les coefficients de

(1) Quand nous parlerons, sans préciser, des δ cela signifiera toujours : les δ à indices tous égaux.

(L_n) sont linéaires et symétriques par rapport à leurs indices ; si q des indices d'un coefficient deviennent égaux, $q !$ se met en facteur dans ce coefficient. En outre, on a la relation (2). Inversement si, dans B , la division par $n !$ est toujours possible, une relation de la forme (L_n) entraîne une relation de la forme (E_n) .

Il suffit pour démontrer la dernière partie du théorème de faire $x_1 = \dots = x_n = x$ dans (L_n) .

Exemple : relation (L_3) (§ 57).

51. — Elargissement des hypothèses.

L'étude précédente montre que la forme générale des coefficients C est déterminée par le fait que les fonctions δ sont des « coefficients de degré q ». Par suite, la condition 3° (§ 45, définition 7 - III) n'intervient pas dans la déduction de la forme générale de (L_n) .

De plus, si on ne fait aucune supposition sur les coefficients de x et de e dans (E_n) , la forme de la relation (L_n) n'est pas changée, mais on ne peut plus rien dire des coefficients de $x_1, \dots, x_n, e$. En particulier, toute équation de degré 2 vérifiée par un élément arbitraire d'une algèbre a comme conséquence une relation (L_2) ; pour qu'une équation de degré 3 vérifiée par un élément arbitraire d'une algèbre ait comme conséquence une relation (L_3) , il suffit que la fonction δ_x soit linéaire en x .

Enfin, toute relation (R_n) analogue à (E_n) reliant des puissances non principales successives de « formes » $\{17\}$ données, par exemple les puissances pleines (§ 46), et dont les coefficients sont des coefficients de degré q convenable est susceptible d'une linéarisation analogue à (L_n) , avec la seule différence que les produits à droite intervenant dans les fonctions S_d doivent être remplacés par des produits dont les « formes » sont celles des puissances figurant dans (R_n) .

52. — Cas de réduction.

Si, au lieu de prendre les éléments x_i ($i = 1, \dots, n$) arbitraires, on les choisit tels que $\delta_{x_i} = 0$ (par extension de la définition 6 (§ 44), nous appellerons encore *canoniques* ces éléments, bien que l'équation (E_n) ne soit pas forcément une équation minima), au second membre de la relation (L_n) les n premiers termes sont nuls. Ce choix est toujours possible si e existe et si B est un corps de caractéristique première à n , de plus :

LEMME 8. — *Pourvu que dans l'équation (E_n) δ_x soit linéaire en x , toute combinaison linéaire, sur B , d'éléments canoniques (au sens généralisé) de l'algèbre A est un élément canonique de A .*

Soit en effet $x = \sum \alpha_i x_i$ ($\alpha_i \in B$), les x_i étant canoniques. On a par hypothèse :

$$\delta_x = \sum_i \alpha_i \delta_{x_i} = 0.$$

[Remarquons qu'il résulte de la linéarité de δ_x que $0 = \delta_{nx} - \delta_x e = \delta_x (n - \delta_x e)$ et par suite que si B est un domaine d'intégrité $\delta_e = n$].

Supposons que A ait une base finie sur le corps quelconque $B = F$. On peut écrire :

$$(5) \quad \delta'_{x,y} = \sum_{i,k} \alpha_{ik} \xi_i \eta_k = \delta'_{y,x} \quad (\alpha_{ik} \in F),$$

ξ_i et η_k étant les coordonnées des éléments arbitraires x et y , dans une base déterminée. On peut toujours réduire le second membre de la forme bilinéaire symétrique (5) à la forme :

$$(6) \quad \delta'_{x,y} = \sum \beta_i \bar{\xi}_i \bar{\eta}_i ,$$

par un changement de variables :

$$(7) \quad \xi_i = \sum_j \varepsilon_{ij} \bar{\xi}_j, \quad \eta_i = \sum_j \varepsilon_{ij} \bar{\eta}_j \quad (\varepsilon_{ij} \in F) ;$$

la matrice (ε_{ij}) étant régulière. Comme on a :

$$x = \sum_i \xi_i e_i = \sum_{ij} \varepsilon_{ij} \bar{\xi}_j e_i ,$$

le changement de variables (7) suppose le changement de base :

$$(8) \quad \bar{e}_j = \sum_i \varepsilon_{ij} e_i .$$

Supposons maintenant, de plus, que A ait un élément unité e et que le corps F soit de caractéristique première à n . Soit $(e, e'_1, \dots, e'_{m-1})$ une base de A . Puisque $e'_i \notin (e)$ on peut toujours trouver $e_i = e'_i + \lambda_i e$ ($\lambda_i \in B$) canoniques non nuls. On a de plus $(e, e_1, \dots, e_{m-1}) = (e, e'_1, \dots, e'_{m-1})$. Cela étant, considérons les équations précédentes de (5) à (8) x et y n'étant plus totalement arbitraires dans A , mais étant définis par :

$$x = \sum_{i=1}^{m-1} \xi_i e_i, \quad y = \sum_{i=1}^{m-1} \eta_i e_i ,$$

(ξ_i, η_i arbitraires dans B).

Faisons le changement de base :

$$\bar{e} = e, \quad \bar{e}_j = \sum_i \varepsilon_{ij} e_i .$$

La condition d'application du lemme précédent étant réalisée, les e_j sont toujours canoniques ; la matrice (ε_{ij}) étant régulière, on a $(A) = (\bar{e}, \bar{e}_1, \dots, \bar{e}_{m-1})$, et :

$$\delta'_{\bar{e}_i, \bar{e}_j} = 0, \quad \text{si } i \neq j .$$

THÉOREME 20. — *Dans une algèbre A avec élément unité e , de degré principal à droite n d'ordre $m > 2$ sur un corps F de caractéristique première à n , il existe une base $(e, e_1, \dots, e_{m-1})$ telle que :*

$$\delta_{e_i} = \delta_{e_i, e_j} = 0 \quad (i \neq j) .$$

Nous appellerons *canonique* une telle base.

Si $n = 2$, on retrouve le fait que dans une algèbre de degré 2 sur $B = F$, avec élément unité (la caractéristique étant différente de 2), il existe une base $\{e, e_i\}$ telle que :

$$(9) \quad e_i^2 = \beta_i e \quad (\beta_i \in B) \quad e_i e_j + e_j e_i = 0 \quad (i \neq j) .$$

Si $n = 3$, et si la caractéristique est différente de 3, il existe une base $\{e, e_i\}$ telle que :

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} e_i^3 = \alpha_i e_i + \beta_i e, \quad e_i^2 e_j + (e_i e_j + e_j e_i) e_i = \alpha_i e_j + \gamma_{ij} e . \\ S_d(e_i, e_j, e_k) \in (e) \quad (i \neq j \neq k \neq i), \quad (\alpha_i, \beta_i, \gamma_{ij} \in B) . \end{array} \right.$$

COROLLAIRE 9. — Si A est une algèbre avec élément unité e , d'ordre m et de degré n sur un corps F de caractéristique première à n , et si $x_1, \dots, x_p$ ($p < m$) sont linéairement indépendants sur F , on peut trouver p combinaisons linéaires indépendantes sur F , y_i des x_i et de e , telles que :

$$\delta_{y_i} = \delta_{y_i, y_j} = 0 \quad (i \neq j)$$

Il suffit de faire $x_i = e_i$ pour $i = 1, \dots, p$ et $y_i = \bar{e}_i$ dans la démonstration du théorème 20.

THÉORÈME 21. — Considérons une algèbre A d'ordre m sur un anneau B où la division par $n!$ est toujours possible. Supposons que toutes les fonctions $S_d(e_h, \dots, e_k)$ où les indices ne sont pas forcément différents, satisfassent aux relations déduites d'une relation de la forme (L_n) par toutes les substitutions $x_1 = e_h, \dots, x_n = e_k$, alors l'élément arbitraire x de A satisfait à une équation de la forme (E_n) .

D'après l'hypothèse sur la divisibilité dans B , les relations déduites d'une substitution où tous les indices ne sont pas différents sont simplifiables dans B . Il suffit alors de former $x^n = (\sum \xi_i e_i)^n$.

Si A contient un élément unité e il suffit de vérifier les conditions du théorème pour les éléments de base autres que l'unité. Alors la base étant $\{e, e_i\}$ tout $x = \sum_{i=1}^{m-1} \xi_i e_i$ satisfera à une équation (E_n) d'où aussi $x + \lambda e$ (λ arbitraire dans B).

Cas $n = 2, n = 3$. B étant quelconque une algèbre, sur B , dont une base vérifie (9) est du second degré ; une algèbre, sur B , dont une base vérifie (10) est du 3^{ème} degré.

53. — Détermination effective d'une base canonique.

Dans un cas particulier important, on peut former simplement une base canonique en prenant pour l'un des éléments de base un élément canonique quelconque donné.

Supposons en effet que l'algèbre soit du second degré sur un corps de caractéristique différente de 2, et soit a_1 un élément canonique donné tel que $a_1^2 = \beta_1 e \neq 0$ ($\beta_1 \in F$). Posons $e_1 = a_1$, prenons un autre élément canonique a_2 tel que : $a_2 \notin (a_1)$; on a : $e_1 a_2 + a_2 e_1 = 2 \gamma_{21} e$ ($\gamma_{21} \in F$). Posons $e_2 = -\beta_1^{-1} \gamma_{21} e_1 + a_2$, il vient $e_1 e_2 + e_2 e_1 = 0$. Supposons qu'on ait trouvé $p - 1$ éléments indépendants $e_1, \dots, e_{p-1}$, tels que :

$$e_i e_j + e_j e_i = 0 \quad (i < j = 2, \dots, p - 1) .$$

Choisissons un élément $a_p \notin (e_1, \dots, e_{p-1})$. On a :

$$e_i a_p + a_p e_i = 2 \gamma_{pi} e \quad (i < p, \quad \gamma_{pi} \in F) .$$

Pourvu que $e_i^2 = \beta_i e \neq 0$ on peut poser :

$$e_p = -\frac{\gamma_{p-1}}{\beta_1} e_1 - \dots - \frac{\gamma_{p-1, p-1}}{\beta_{p-1}} e_{p-1} + a_p ,$$

et on a $e_i e_p + e_p e_i = 0$.

En particulier, on peut ainsi former la base cherchée dans toute algèbre (du second degré et de caractéristique différente de 2) sur un corps, dans laquelle le carré de tout élément non nul est différent de zéro (cf. Algèbres symétriques du second degré, § 117).

54. — Propriété particulière des algèbres du 3^{ème} degré sur un corps.

Dans le cas des algèbres du second degré sur un corps de caractéristique différente de 2 et ayant un élément unité e , on sait qu'on peut préciser le corollaire 9 de la façon suivante : si x_1 et x_2 sont deux éléments quelconques, on peut trouver des éléments β_1, β_2 ; λ, μ ; ρ de F tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \lambda e + y_1 , \\ x_2 = \mu e + \rho y_1 + y_2 , \\ \text{avec } y_1^2 = \beta_1 e , \quad y_2^2 = \beta_2 e , \\ \text{et pourvu que } \beta_1 \neq 0 , \quad y_1 y_2 + y_2 y_1 = 0 . \end{array} \right.$$

Cela résulte, par exemple, du paragraphe précédent.

Nous allons montrer que dans le cas d'une algèbre A du 3^{ème} degré sur un corps de caractéristique différente de 2 et de 3, on a le résultat analogue suivant :

Si x_1, x_2, x_3 sont des éléments quelconques de A il existe des éléments λ, μ, ν ; ρ, σ, τ ; $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ de F tels que l'on ait :

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \lambda e + y_1 , \\ x_2 = \mu e + \rho y_1 + y_2 , \\ x_3 = \nu e + \sigma y_1 + \tau y_2 + y_3 , \\ \text{avec } y_1^2 = \alpha_1 y_1 + \beta_1 , \quad y_2^2 = \alpha_2 y_2 + \beta_2 , \quad y_3^2 = \alpha_3 y_3 + \beta_3 . \end{array} \right.$$

En outre, en posant $z_2 = \rho y_1 + y_3$, si la condition :

$$(C) \quad \delta_{y_1, y_1} \delta_{z_2, z_2} \neq 0$$

est remplie, on a :

$$(12) \quad S_d(y_1, y_2, y_3) \in (e) .$$

Les équations (11) peuvent évidemment être satisfaites par un choix convenable de λ, μ, ν (cf. lemme 8). Il suffit de montrer que si on a la relation (C) on peut trouver ρ, σ, τ de façon que l'on ait (12). Pour cela il faut et il suffit que :

$$\delta_{y_1, y_2} = \delta_{y_2, y_3} = \delta_{y_3, y_1} = 0$$

D'où, puisque les fonctions sont linéaires par rapport à leurs arguments, en posant $z_1 = \sigma y_1 + \tau y_2 + y_3$ et après réduction :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \delta_{y_1, y_1} = \delta_{y_1, z_1} \\ \tau \delta_{y_1, z_1} - (\rho \tau - \sigma) \delta_{y_1, y_1} = \delta_{y_1, z_2} \\ \tau \delta_{z_1, z_1} = \delta_{z_2, z_2} \end{array} \right.$$

Système d'équations en $\rho, \tau, \rho \tau - \sigma$ dont le déterminant est $\delta_{y_1, y_1}^2 \delta_{z_2, z_2}$.

C. Q. F. D.

CHAPITRE VI

APPLICATIONS

55. — Méthode.

D'une façon analogue à ce qui a été dit au paragraphe 25, étant donnée une relation (E_k) , nous introduirons dans la linéarisation (L_k) qui s'en déduit, toutes les substitutions $(p_1(n_1), \dots, p_k(n_k))$ avec $\sum_{i=1}^k n_i = n$, en faisant $n = k + 1, k + 2, \dots$, etc... Nous en déduirons essentiellement des propriétés de commutation et de finitude de toute sous-algèbre $[x]$. Nous nous bornerons à $k \leq 5$.

56. — Algèbres de degré 2.

Si $x^2 \in (x, e)$ il en est de même de x^n et comme l'algèbre est à puissances associatives (corollaire 7, 1°), il en est de même de toute puissance. Par suite :

THÉORÈME 22. — Dans toute algèbre de degré 2 on a pour tout x :

$$([x]) = (x, e)$$

57. — *Algèbres du 3^{ème} degré à droite.*

Soit A une algèbre du 3^{ème} degré à droite, sur B. En vertu du théorème 19 on a :

$$(L_3) \quad S_d(x_1, x_2, x_3) = \delta_{x_1}(x_2x_3 + x_3x_2) + \delta_{x_2}(x_3x_1 + x_1x_3) + \\ \delta_{x_3}(x_1x_2 + x_2x_1) + \delta'_{x_1}x_2x_3 + \delta'_{x_2}x_3x_1 + \delta'_{x_3}x_1x_2 + \delta'_{x_1, x_2, x_3}e.$$

Dans cette relation, faisons $x_1 = x_2 = x$, $x_3 = x^2$. Il vient, pourvu que la caractéristique soit première à 2 :

$$x^2x^2 + (xx^2)x \in (xx^2, x^2, x, e).$$

Par suite :

THÉOREME 23. — *Dans une algèbre du 3^{ème} degré à droite, de caractéristique première à 2, si a est un élément dont le polynôme minimum à gauche est de degré inférieur à 4, on a :*

$$([a]) = (e, a, a^2).$$

COROLLAIRE 10. — *Dans une algèbre du 3^{ème} degré à droite et de caractéristique première à 2, si un élément a admet les mêmes équations minima à gauche et à droite, la sous-algèbre [a] est commutative.*

Si dans une algèbre du 3^{ème} degré à droite et de caractéristique première à 2 on a $xx^2 = x^2x$, toute $[x]$ est commutative. D'après le corollaire 7, partie 2^o, pour que toute $[x]$ soit associative, il suffit alors que $x^2x^2 = x^4$. On ne peut se passer de cette condition, comme l'indique l'exemple suivant :

TABLE V

e	a	a^2
a	a^2	$e + a$
a^2	$e + a$	e

$$\text{car } a^2a^2 = e \neq a^3a = a + a^2.$$

58. — La condition $x^3 = x^3$ étant supposée remplie, on peut exprimer la condition $x^2x^2 = x^4$ en faisant intervenir les coefficients de l'équation principale à droite. Le calcul de l'expression du premier membre (x^2x^2) au moyen de (e, x, x^2) se fait en utilisant la relation (L_3) et l'équation (E_3) elle-même donne immédiatement l'expression du second membre dans cette même base. L'égalité des deux membres donne les relations :

$$\delta_{x^2} - \delta_x^2 = 2 \delta_{x, x}, \quad \delta'_{x, x^2} - \delta_x \delta_{x, x} = 3 \delta_{x, x, x}, \quad \delta'_{x, x, x^2} - \delta_x \delta_{x, x, x} = 0.$$

59. — *Algèbres du 4^{ème} degré à droite.*

Soit A une algèbre, sur B, du 4^{ème} degré à droite. De l'équation :

$$(E_4) \quad x^4 = \delta_x x^3 + \delta_{x, x} x^2 + \delta_{x, x, x} x + \delta_{x, x, x, x} e,$$

il résulte :

$$(L_4) \quad S_d(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum_{i=1}^4 \delta_{x_i} S_d(x_j, x_k, x_h) + v$$

(i, j, k, h étant tous différents),

avec $v \in (S_d(x_1, x_2), \dots, S_d(x_3, x_4), x_1, \dots, x_4, e)$.

Supposons maintenant de plus que A est à cubes uniques ($xx^2 = x^2x$) et de caractéristique première à 6. Alors A est à puissances principales uniques (corollaire 4 et théorème 17) et par suite (théorème 13) tous les commutateurs de degré inférieur à 8 sont nuls. Nous allons montrer qu'il en est de même pour *tous* les commutateurs relatifs aux puissances d'un même élément.

En effet, soient E_n le module, sur B, engendré par toutes les puissances de x de degré inférieur à $n + 1$, et $E_0 = E$. Posons :

$$U = x^2x^2, \quad V = x^3x^2, \quad W = x^3x^3.$$

1° On a la relation :

$$(1) \quad E = (W, V, U, x^3, x^2, x, e).$$

En effet, les substitutions (2, 1, 1, 1), (3, 1, 1, 1), (2, 2, 1, 1) dans (L_4) donnent respectivement les relations :

$$(2) \quad V + Ux = Vx + Ux^2 = 0 \pmod{E_4}, \quad W + Vx = 0 \pmod{E_5},$$

d'où l'on déduit $(Ux) x \in E$.

2° Les commutateurs de degré n (pour tout entier naturel n) sont nuls et $4E_n = 0 \pmod{E_{n-1}}$ pour $n > 6$.

En effet :

a) Les substitutions $(2 * 2, 1, 1, 1)$, $(3, 2, 1, 1)$, $(2, 2, 2, 1)$ entraînent les relations

$$(3) \quad 4Ux^3 = 4(Ux^2)x = 4Vx^2 = 0 \pmod{E}.$$

Des relations (2) et (3) et des propriétés de commutation déjà établies, on déduit :

$$4E_7 = 0 \pmod{E}.$$

b) L'emploi des substitutions $(3, 2, 2, 1)$, $(2 * 2, 2, 1, 1)$ dans (L_4) et dans $S_d(x_1, x_2, x_3, x_4) = S_g(x_1, x_2, x_3, x_4)$ et le remplacement de x par x^2 dans (E_4) montre que l'on a, en tenant compte des relations précédentes :

$$4E_8 = 0 \pmod{E_7},$$

et que les commutateurs de degré 8 sont nuls.

De même les substitutions $(3 * 3, 1, 1, 1)$, $(2 * 2, 3, 1, 1)$ entraînent respectivement

$$E_6 x^3 = x^3 E_6, \quad 4E_6 x^3 = 0 \pmod{E_6}$$

et

$$E_5 U = U E_5, \quad 4E_5 U = 0 \pmod{E_5}$$

Par suite, la commutation s'étend au degré 9 et

$$4E_9 = 0 \pmod{E_9}$$

Pour les degrés 10, 11 et 12, on utilise respectivement les substitutions $(2 * 3, 3, 1, 1)$, $(3 * 3, 3, 1, 1)$, $(3 * 3, 2, 2, 2)$ cette dernière montrant que $4(Ux^2)W = 0 \pmod{E_{11}}$ et comme $4(Ux^2)W = 4W^2 \pmod{E_5 W}$, il en résulte $4W^2 = 0 \pmod{E_{11}}$.

La proposition 2^o est alors démontrée jusqu'à $n = 12$.

c) Supposons qu'elle soit vraie jusqu'au degré $n - 1$ et soit y une puissance quelconque de x de degré n . On a $y = zt$ où z est une puissance de x de degré $n - k$ et t une puissance de x de degré k . Comme on peut supposer $n > 12$, si $k < 7$ on a $n - k \geq 7$ donc $4z = 0 \pmod{E_{n-k-1}}$ d'où $4y = 0 \pmod{E_{n-k-1} t}$, par suite $4y = 0 \pmod{E_{n-1}}$, d'autre part on a $4z = Z_{n-k-1}$ où $Z_{n-k-1} \in E_{n-k-1}$ et, par hypothèse $Z_{n-k-1} t = t Z_{n-k-1}$ d'où $4(zt - tz) = 0$ et par suite $zt = tz$. Si on avait $k \geq 7$ on intervertirait z et t dans le raisonnement précédent. Le Lemme s'étend donc au degré n .

Il en résulte :

THÉOREME 24. — Si A est une algèbre du 4^{ème} degré à droite sur B , à cubes unique et de caractéristique première à 6 :

1^o A est à puissances commutatives,

2^o $2^{2(n-6)} E_n = 0 \pmod{E}$ pour $n > 6$, où E_n est le module, sur B , engendré par les puissances de degré inférieur à $n + 1$ et où :

$$E = (x^3 x^3, x^3 x^2, x^2 x^2, x^3, x^2, x, e)$$

COROLLAIRE 11. — Si dans B la division par 2 est toujours possible, pour tout x de A on a :

$$([x]) = (x^3 x^3, x^3 x^2, x^2 x^2, x^3, x^2, x, e)$$

60. — Exemple.

Il s'introduit donc à partir du degré 4 deux complications :

1^o La réduction du module de $[x]$ est conditionnée par la divisibilité par 2 dans E

2^o Cette condition étant même supposée satisfaite, il s'introduit dans $([x])$ des puissances non principales.

L'exemple suivant, construit au moyen des relations (2), (3), ..., etc..., montre bien qu'on ne peut, en général, et quel que soit l'anneau B , restreindre à moins de 7 le nombre

des éléments de base d'une sous-algèbre monogène ⁽¹⁾ de A. Considérons en effet l'algèbre [a] dont les éléments de base sont :

$$a_1 = a, \quad a_2 = a^2, \quad a_3 = a^3, \quad a_4 = a^2a^2, \quad a_5 = a^3a^2, \quad a_6 = a^3a^3,$$

et qui est définie, sur un anneau B quelconque, par la table suivante :

TABLE VI

e	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
a_1	a_2	a_3	0	$-a_5$	$-a_6$	0
a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	0	0
a_3	0	a_5	a_6	0	0	0
a_4	$-a_5$	a_6	0	0	0	0
a_5	$-a_6$	0	0	0	0	0
a_6	0	0	0	0	0	0

Cette algèbre (commutative) est du 4^{ème} degré. En effet, pour le montrer, il suffit de vérifier que tous les éléments de la forme $x = \sum_{i=1}^6 \xi_i a_i$ sont du 4^{ème} degré. Or, pour ces éléments, on vérifie immédiatement que $x^4 = 0$. Par suite, si $y = \xi_0 e + x$, on a :

$$y^4 - 4 \xi_0 y^3 + 6 \xi_0^2 y^2 - 4 \xi_0^3 y + \xi_0^4 e = 0.$$

61. — Cas de réduction du module.

Cependant pour que le module E relatif à un certain élément a se réduise à (a^3, a^2, a, e) il suffit que :

$$a^2a^2 \in (a^3, a^2, a, e).$$

Il résulte en effet immédiatement des relations (2) qu'alors V et W appartiennent aussi à (a^3, a^2, a, e) . Si cela se produit pour tout x de [a] l'anneau [a] est à puissances quasi-associatives (§ 11, 2°).

Par suite et d'après les corollaires 7 (3°) et 8 on a :

THÉOREME 25. — Soit A une algèbre satisfaisant aux conditions du théorème 24.

1° Si $a^2a^2 \in (a^3, a^2, a, e)$ ($a \in A$) et si dans B la division par 2 est toujours possible, il en résulte :

$$([a]) = (a^3, a^2, a, e).$$

2° Si $a^2a^2 = a^4$, $a^3a^2 = a^5$ et $a^3a^3 = a^6$ la sous-algèbre [a] est associative.

(1) Même si A est à cubes uniques.

3° Si enfin, pour tout x de A , on a $x^2x^2 = x^4$, A est à puissances associatives.

Il est clair que, dans les deux derniers cas, on a $([a]) = (a^3, a^2, a, e)$ sans faire intervenir la divisibilité par 2 dans B .

62. — Cas des algèbres finies sur un corps.

Rappelons que si A est une algèbre ayant une base finie sur un corps F et de degré n sur F , A est aussi du $n^{\text{ème}}$ degré sur F . Si la caractéristique de F est différente de 2, la division par 2 dans F est toujours possible. Par suite, en rassemblant dans ce cas les résultats essentiels de ce chapitre, nous avons :

THÉOREME 26. — Soit A une algèbre ayant une base finie sur un corps F .

1° Si A est de degré 2, A est à puissances associatives et on a :

$$([x]) = (x, e) .$$

2° Si A est de degré 3, à cubes uniques et si F est de caractéristique différente de 2, A est à puissances commutatives et on a :

$$([x]) = (x^3, x, e) .$$

3° Si A est de degré 4, à cubes uniques et si F est de caractéristique première à 6, A est à puissances commutatives et on a :

$$([x]) = (x^3x^3, x^3x^2, x^2x^2, x^3, x^2, x, e) .$$

On ne peut, en général, réduire davantage le module des sous-algèbres monogènes (cf. algèbres définies par les tables V et VI).

63. — Comparaison avec les résultats de la Première Partie.

Comparons les résultats obtenus dans ce chapitre avec les résultats généraux du paragraphe 37 (Première Partie).

Appelons A_i^* un anneau A_i ($i = 1, 2, \dots, 7$), de caractéristique première à 6, et de degré n avec $n < 5$. On a :

$$(4) \quad A_i^* = A_j^* \text{ pour } i, j = 2, 3, 4, 5, 6$$

et par suite toutes les inclusions (18) du théorème 16, à part les deux inclusions extrêmes, deviennent pour les A_i^* des égalités.

64. — Algèbres de degré supérieur à 4.

Nous nous bornerons à montrer que les relations (4) ne s'étendent pas au delà du 4^{ème} degré (même si la caractéristique est nulle).

En effet, l'algèbre définie par la table II (Première Partie, § 30) — nous dirons algèbre II — est à cubes uniques ; si B est, par exemple, un corps non modulaire

l'algèbre est au plus du 5^{ème} degré et cependant elle n'est pas à puissances principales uniques (elle est donc exactement du 5^{ème} degré). Par suite, si l'on dépasse le 4^{ème} degré, la caractéristique étant, par exemple, 0, on a schématiquement :

$$\{A_2\} \supset \{A_3\} .$$

L'algèbre III (§ 32) est à puissances principales uniques ; prenons, par exemple, pour anneau B un corps F, l'algèbre est alors du 6^{ème} degré et cependant elle n'est pas à puissances principales commutatives.

L'algèbre IV (§ 35) prise, par exemple, sur un corps F, est à puissances principales commutatives, du 6^{ème} degré et cependant elle n'est pas à puissances commutatives.

Par suite, si l'on dépasse le 5^{ème} degré (la caractéristique étant par exemple 0) on a schématiquement :

$$\{A_2\} \supset \{A_3\} \supset \{A_4\} \supset \{A_5\} .$$

THÉORÈME 27. — Soit $\mathcal{E}^n$ la catégorie des algèbres de caractéristique première à $(p - 1)!$ et du $p^{\text{ème}}$ degré avec $p \leq n$. Appelons $\mathcal{E}_i^n$ ($i = 1, \dots, 7$) la sous-catégorie des algèbres qui appartiennent à la fois à la catégorie A_i ($i = 1, \dots, 7$, cf. § 37) et à la catégorie $\mathcal{E}^n$.

1° Si $n < 5$ les sous-catégories $\mathcal{E}_i^n$, pour $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, ne sont pas distinctes.

2° Si $n = 5$, la sous-catégorie $\mathcal{E}_2^n$ contient strictement la sous-catégorie $\mathcal{E}_3^n$.

3° Si $n > 5$, la sous-catégorie $\mathcal{E}_j^n$ ($1 < j < 6$) contient strictement les sous-catégories $\mathcal{E}_k^n$ ($k > j$) .

Remarque. — Les théorèmes 23 (et son corollaire), 24 (précisé par son corollaire) 25 et 27 sont encore vrais (cf. § 51) si au lieu de considérer des algèbres du $p^{\text{ème}}$ degré, p étant déterminé ($p = 3, 4$), on considère des algèbres de degré p dont les $n - 2$ premières fonctions δ sont des coefficients de degré q ($q = 1, \dots, n - 2$), sur un anneau B où la division par $(p - 1)!$ est toujours possible.

TROISIÈME PARTIE

PROPRIÉTÉS D'INVERSIBILITÉ DES ANNEAUX NON ASSOCIATIFS

Le groupoïde multiplicatif G des anneaux non associatifs considérés dans cette partie contiendra un élément unité bilatère e .

SECTION I

ÉTUDE GÉNÉRALE DE L'INVERSIBILITÉ D'UN ÉLÉMENT

DÉFINITIONS ET NOTATIONS

65. — *Inverse à gauche. Inverse à droite.*

Si à l'élément a d'un groupoïde G correspond (au moins) un élément a_g de G tel que :

$$a_g a = e ,$$

a_g est un *inverse à gauche* de a et a est *inversible à gauche*.

L'*inverse à droite* a_d et l'*inversibilité à droite* de a sont définis d'une façon analogue à partir de la formule :

$$a a_d = e .$$

Si a_g et a_d existent et si l'on a $a_g \neq a_d$, a sera dit *inversible unilatéralement*.

66. — *Inverse bilatère.*

Etant donné l'élément a de G , s'il existe (au moins) un élément a' tel que :

$$a a' = a' a = e ,$$

a' est dit *inverse bilatère* de a et a est dit *inversible bilatéralement*. Nous dirons souvent *inverse* pour *inverse bilatère*.

67. — *Diviseurs de zéro.*

Soit a un élément d'un groupoïde G contenant l'élément 0 . S'il existe, dans G , un élément $u_g \neq 0$ tel que :

$$u_g a = 0$$

a est dit *diviseur de zéro à droite*.

On a une définition analogue pour les *diviseurs de zéro à gauche*.

Si $a \neq 0$, a est dit *diviseur propre de zéro à gauche (droite)*.

S'il existe, dans G , un élément $u \neq 0$ tel que :

$$au = ua = 0$$

a est dit *diviseur bilatère de zéro*. On dit encore que a et u sont *orthogonaux*. Si $a \neq 0$, a est *diviseur propre bilatère de zéro* ; a et u sont *proprement orthogonaux*.

CHAPITRE VII

INVERSIBILITÉ DANS LES ANNEAUX ASSOCIATIFS ET ALTERNATIFS

A. — ANNEAUX ASSOCIATIFS

Nous indiquons le détail des démonstrations du cas associatif afin de mettre en évidence les généralisations possibles qui seront faites plus loin. Dans chaque énoncé et sa démonstration on pourra échanger partout les mots « droite » et « gauche ».

68. — *Les quatre cas classiques.*

LEMME I. — *Dans un demi-groupe (ayant un 0) un élément qui est diviseur de zéro à droite n'est pas inversible à droite.*

Si on a $u_g a = 0$ et $aa_d = e$, cette dernière équation multipliée par u_g à gauche donne $u_g (aa_d) = u_g$. D'après l'associativité $u_g (aa_d) = (u_g a) a_d = 0$; d'où $u_g = 0$.

LEMME II. — *Dans tout anneau non associatif si l'inverse à droite de a existe et est unique, a n'est pas diviseur de zéro à gauche.*

Supposons que l'on ait $au_d = 0$ et $aa_d = e$, il en résulte par addition $a(u_d + a_d) = e$ ce qui exige, d'après l'hypothèse, $a_d = u_d + a_d = a_d + u_d$, et par suite $u_d = 0$.

THÉORÈME I. — *Dans un anneau associatif, si l'inverse à droite a_d de a existe et est unique, l'inverse à gauche existe, il est unique et égal à a_d .*

1° *Existence*. — Si $aa_d = e$ il en résulte $(aa_d)a - a = 0$ et, d'après l'associativité $a(a_da - e) = 0$, par suite, d'après le lemme II, on a $a_da = e$.

2° *Unicité*. — Si $a_ga = e$, d'après le lemme I on a $a_g - a_d = 0$.

COROLLAIRE I. — Si l'élément a d'un anneau associatif admet au moins un inverse à gauche a_g et au moins un inverse à droite a_d : 1° a_g et a_d sont uniques ; 2° $a_g = a_d$.

L'élément a étant inversible à droite n'est pas diviseur de zéro à droite, par suite a_g est unique.

THÉOREME II. — Si l'élément a d'un anneau associatif admet plusieurs inverses à droite, il n'admet aucun inverse à gauche.

Car les relations $aa_d = ab_d = e$, $a_d \neq b_d$ entraînent $a(a_d - b_d) = 0$, $a_d - b_d \neq 0$

THÉOREME III. — Si un élément a d'un anneau associatif admet plusieurs inverses à droite, il admet une infinité d'inverses à droite.

En effet, en désignant par a_d l'un des inverses à droite et par m un nombre naturel quelconque, on a $a(a_d + a^m - a_da^{m+1}) = e$ et si les inverses à droite de a , ainsi définis, n'étaient pas tous distincts, on aurait, pour $n > m$, $a^m - a_da^{m+1} = a^n - a_da^{n+1}$ en multipliant à droite cette relation par $a_d^m - a_d^{m+1}a$ il vient $e - a_da = 0$, ce qui est inexact (théorème II).

COROLLAIRE II. — Dans tout anneau associatif, il n'y a pas d'autres possibilités, relatives à l'inversion d'un élément, que celles indiquées par le tableau suivant :

	I	II	III	IV
T_1	un inverse bilatère unique	une infinité d'inverses à droite, 0 inverse à gauche	0 inverse à droite, une infinité d'inverses à gauche	0 inverse à droite 0 inverse à gauche

HELLINGER et TOEPLITZ ont montré (dans le cas des anneaux de matrices infinies sur un corps) que les quatre cas étaient effectivement possibles ({23}, chapitre V, § 5).

69. — Généralisation.

Les démonstrations précédentes ne s'appuient ni sur la commutativité, ni sur l'associativité de l'addition. Elles subsistent, avec de très légères et évidentes modifications, pourvu que les conditions suivantes soient remplies. Soit H le groupoïde additif du domaine considéré ; les trois premières conditions concernent exclusivement l'addition :

1° H contient un élément unité bilatère 0.

2° H vérifie l'axiome de simplification à gauche (ou l'axiome de simplification à droite) ({16}, p. 42).

3° Tout élément de H est inversible à gauche (ou à droite).

4° La multiplication est distributive bilatéralement par rapport à l'addition.

[Remarquons que cette dernière condition entraîne, quels que soient les éléments a, b, c, d de H , l'identité :

$$(ac + ad) + (bc + bd) = (ac + bc) + (ad + bd)].$$

Il est clair qu'alors tous les résultats précédents subsistent. Il convient de préciser que les inverses à droite de a sont $a_d + (a^m - a_d a^m + 1)$ et $(a^m - a_d a^m + 1) + a_d$.
Ainsi :

THÉORÈME 28. — *Soit D un domaine qui est un groupoïde H vérifiant les conditions 1^o 2^o et 3^o par rapport à une opération addition et un demi-groupe avec élément unité par rapport à une opération multiplication admettant une distributivité bilatère par rapport à l'addition ; alors, pour tout élément de D , les seuls cas possibles sont ceux du tableau T_1 .*

Le théorème s'applique en particulier ($\{16\}$, p. 45) si H est un quasi-groupe avec élément unité (loop).

70. — Relations entre la divisibilité et l'inversibilité.

Dans tout demi-groupe, si l'inverse à droite a_d d'un élément a existe, la division à droite, de tout élément, par a est possible et s'effectue en multipliant à droite par a_d .

Il résulte du paragraphe précédent qu'on a de plus le :

THÉORÈME 29. — *Soit D un domaine satisfaisant aux conditions du théorème 28. Si l'inverse à droite d'un élément a de D existe et est unique, la division à gauche et la division à droite par a sont toutes deux possibles et toutes deux possibles d'une seule façon.*

En effet si on avait, par exemple, plusieurs quotients à gauche, a serait diviseur de zéro à droite.

Nous revenons dans toute la suite au cas où H est un groupe abélien.

71. — Cas particulier.

Si dans une algèbre (associative) avec élément unité sur un corps l'élément a satisfait à une équation de degré fini de «terme constant» α , ou bien $\alpha \neq 0$: a admet un inverse bilatère dans $[a]$, ou bien $\alpha = 0$: a est diviseur de zéro à droite et diviseur de zéro à gauche ; seules les éventualités I et IV du Tableau T_1 sont donc possibles. C'est le cas pour tout élément d'une algèbre (associative) algébrique sur un corps.

B. — ANNEAUX ALTERNATIFS

72. — Inversibilité et divisibilité.

Le cas des anneaux alternatifs se ramène à celui des anneaux associatifs grâce aux propriétés suivantes :

1^o Si a, b, c sont trois éléments d'un anneau alternatif A , tels que l'associateur (a, b, c) soit nul, alors $[a, b, c]$ est un sous-anneau associatif ($\{29\}$, théorème 1).

2^o Si a admet un inverse à droite a_d et si b est un élément quelconque de A , on a $(a_d, a, b) = 0$ ($\{29\}$, lemme 2, remarque).

Les raisonnements du cas associatif s'appliquent donc sans aucun changement et on a :

THÉOREME 30. — *Dans tout anneau alternatif, pour tout élément, les seuls cas possibles sont ceux du tableau T_1 .*

Ce tableau se réduit aux cas I et IV, dans le cas d'une algèbre (alternative) algébrique sur un corps.

Les relations entre l'inversibilité et la divisibilité sont les mêmes que dans le cas associatif.

73. — Remarque.

On ne peut faire, en ce qui concerne l'addition, la même extension que dans le cas associatif, car les propriétés 1° et 2° exigent que le groupoïde additif soit un groupe abélien.

CHAPITRE VIII

INVERSIBILITÉ DANS LES ANNEAUX NON ALTERNATIFS

74. — Contre-exemples.

1° *Un élément peut être à la fois inversible à droite et diviseur de zéro à droite.*

Dans l'algèbre sur B (anneau associatif, commutatif, avec l'élément unité 1) définie par la table :

e	e_1	e_2
e_1	$-e$	0
e_2	0	$-e$

TABLE VII

on a $e_1(-e_1)=e$ (e_1 est inversible à droite) et $e_2e_1=0$ (e_1 est diviseur de zéro à droite). L'algèbre étant commutative il en résulte même :

2° *Un élément peut être à la fois inversible bilatéralement et diviseur bilatère de zéro.*

3° *L'existence et l'unicité de l'inverse à droite d'un élément n'entraînent pas, en général, l'existence de l'inverse à gauche.*

En effet, dans l'algèbre sur B définie par la table :

e	e_1	e_2
e_1	e_2	e
e_2	0	0

TABLE VIII

l'élément e_1 admet *un seul inverse à droite*, en effet l'équation :

$$e_1 (\theta_0 e + \theta_1 e_1 + \theta_2 e_2) = e$$

entraîne $\theta_0=0$, $\theta_1=0$, $\theta_2=1$, alors que e_1 n'admet *aucun inverse à gauche*, car l'équation :

$$(\varphi_0 e + \varphi_1 e_1 + \varphi_2 e_2) e_1 = e$$

entraîne $\varphi_0 e_1 + \varphi_1 e_2 = e$ ce qui est impossible.

4° Si l'inverse à droite d'un élément existe et est unique et si l'inverse à gauche existe, il n'est pas forcément unique.

Considérons l'algèbre, sur un corps F , définie par la table :

TABLE IX

e	e_1	e_2
e_1	$-e$	$-e_1$
e_2	e_1	$-e$

L'élément $e + e_1 + e_2$ a un inverse unique à droite pourvu que la caractéristique de F soit différente de 2 et de 3, au contraire il a une infinité d'inverses à gauche.

5° Si les inverses à droite et à gauche d'un élément existent et sont uniques, il n'en résulte pas, en général, qu'ils soient égaux.

L'égalité des inverses à gauche et à droite n'est pas réalisée, en général, même dans une algèbre à division. En effet, considérons l'algèbre réelle à division avec élément. unité, du 4^{ème} ordre et du 4^{ème} degré définie par la table :

TABLE X

e	e_1	e_2	e_3
e_1	$-e + e_1$	e_3	$-e_2 + e_3$
e_2	$e_2 - e_3$	γe_1	γe
e_3	e_2	$-\gamma e + \gamma e_1$	γe_1

γ étant un nombre réel non nul. Certains éléments ont un inverse bilatère, ainsi $(e_1)_d = (e_1)_g = e - e_1$, par contre $(e_3)_d = \gamma^{-1} e_3 \neq (e_3)_g = \gamma^{-1} e_2 - \gamma^{-1} e_3$.

Conclusion. — Dans les anneaux non associatifs, tous les cas imaginables a priori, en ce qui concerne le nombre des inverses à gauche et à droite d'un élément déterminé, sont effectivement possibles.

75. — Cas où l'algèbre est à division.

THÉOREME 31. — Si A est une algèbre ayant une base finie sur un corps et si pour tout x de A l'inverse à droite x_d existe et est unique, alors l'inverse à gauche x_g existe et est unique et l'algèbre est à division. Mais en général $x_g \neq x_d$.

Il suffit de démontrer que l'algèbre est à division.

1° A ne contient pas de diviseurs propres de zéro.

En effet, s'il existait un diviseur propre de zéro à droite, soit y_d , il existerait un élément $x \neq 0$ tel que $xy_d = 0$ et par suite x_d et $x_d + y_d$ seraient deux inverses à droite distincts de x . L'absence de diviseurs propres de zéro à droite entraîne l'absence de diviseurs propres de zéro à gauche.

2° A est une algèbre à division.

Cela signifie que si $a \neq 0$ et b sont quelconques dans A, les équations $xa = b$ et $ay = b$ sont résolubles d'une façon unique. Etant donnée l'absence de diviseurs de zéro il suffit de démontrer l'existence de x et de y .

Soit $z \neq 0$ un élément arbitraire de A : on a toujours $za \neq 0$, il en résulte que la matrice de multiplication à droite Γ_a , telle que $za = z\Gamma_a$, est régulière, d'où $x = b\Gamma_a^{-1}$. Démonstration analogue pour y .

Remarque. — Dans toute algèbre à division avec élément unité, on a évidemment $(x_g)_d = (x_d)_g = x$, pour tout $x \neq 0$.

76. — Inversibilité et divisibilité.

Nous verrons (théorème 65, 2°) que, si l'algèbre IX est prise sur un corps réel quelconque, chacun de ses éléments (non nul) admet un inverse bilatère. Pourtant, il est clair que, sur le corps des nombres réels, dans cette algèbre d'ordre impair, la division n'est pas toujours possible.

Conclusion. — Les notions d'inversibilité et de divisibilité se séparent : la divisibilité (de tout élément) par un élément a entraîne évidemment l'inversibilité (au moins unilatérale) de a , mais la réciproque n'est plus vraie (même si l'inverse existe pour tout élément non nul).

77. — Cas d'un élément de degré principal fini.

Supposons que l'élément a satisfasse à une équation minima à droite de degré n (§ 44). On peut écrire cette équation $p(a)a = \lambda e$ ($\lambda \in B$) où $p(a)$ est un polynôme à droite de degré $n - 1$.

THÉORÈME 32. — Si les coefficients du polynôme $p(a)$ sont divisibles, dans B, par λ :

1° Il existe un inverse à gauche a_g appartenant au module $(e, a, \dots, a^{n-1})$.

2° Si B est un domaine d'intégrité, il n'existe pas d'autre inverse b_g appartenant au module $(e, a, \dots, a^k)$ si $k < n$.

3° Si B est un corps, il n'existe pas d'autre inverse b_g appartenant au module des puissances à droite.

1° Il suffit de prendre $a_g = \frac{p(a)}{\lambda}$.

2° b_g est un polynôme $q(a)$ de degré inférieur à n , on a $q(a)a - e = 0$ et $\frac{p(a)}{\lambda}a - e = 0$. D'après la formule (3') (§ 39) où $\wedge' = \wedge = 1$, il en résulte $b_g = a_g$.

3° Si B est un corps, b_g peut toujours être mis sous la forme d'un polynôme de degré inférieur à n et la démonstration ci-dessus s'applique.

Réciproquement :

THÉORÈME 33. — *S'il existe un inverse à gauche de a , soit b_g , appartenant au module $(e, a, \dots, a^k)$:*

1° Si B est un domaine d'intégrité et si $k < n$, les coefficients de $p(a)$ sont divisibles dans B , par λ .

2° Si B est un corps, k étant quelconque, on a $\lambda \neq 0$.

En effet, avec les mêmes notations que précédemment :

1° On a $b_g = q(a)$ donc $q(a)a - e$ et $p(a)a - \lambda e$ sont deux polynômes minimaux à droite de a , l'équation (3') (§ 39), où $\Lambda' = \lambda$ et $\Lambda = 1$, montre que $\lambda q(a)a$ et $p(a)a$ ont leurs coefficients égaux ; il en est donc de même pour $\lambda q(a)$ et $p(a)$.

2° Quel que soit k , on a $b_g = q(a)$ de degré inférieur à n et la démonstration ci-dessus s'applique.

Ces théorèmes se complètent l'un l'autre et il en résulte :

COROLLAIRE 12. — *Si l'élément a d'une algèbre non associative sur un corps satisfait à une équation minima à droite de degré fini pour que a admette un inverse à gauche appartenant au module des puissances à droite, il faut et il suffit que, dans l'équation minima, le coefficient de e soit différent de 0. Dans ce cas, il n'existe qu'un inverse à gauche appartenant au module des puissances à droite de a .*

CHAPITRE IX

INVERSIBILITÉ DANS LES ANNEAUX A PUISSANCES PRINCIPALES UNIQUES

Nous nous bornons à des conséquences immédiates des propriétés formelles de ces anneaux, afin de montrer que, dans des circonstances déjà très générales, la notion d'inversibilité bilatère garde son importance.

78. — Anneaux flexibles.

Ce cas tire son importance du calcul que nous rappelons : si $aa_d = e$ il en résulte $(aa_d)a - a = 0$ d'où, pourvu que l'anneau soit flexible, $a(a_d a - e) = 0$. Par suite :

THÉORÈME 34. — *Si, dans un anneau flexible quelconque, l'élément a admet un inverse à droite unique a_d , a admet également a_d comme inverse bilatère unique.*

Dans un anneau flexible quelconque, on a donc, à priori, les cas notés schématiquement dans le tableau suivant :

	I	II	III	IV	V	VI
T_1	Un a_d , un $a_g = a_d$, éventuellement d'autres a_g	Un a_g , un $a_d = a_g$, éventuellement d'autres a_d	Plusieurs a_d , plusieurs a_g	Plusieurs a_d , $0 a_g$	Plusieurs a_g , $0 a_d$	$0 a_d$ $0 a_g$

(cf. théorème 53).

79. — Algèbres à puissances principales uniques.

Dans une algèbre à puissances principales uniques si l'élément a satisfait à une identité de degré fini entre puissances principales à coefficients dans B , on peut écrire :

$$ap(a) = p(a)a = \lambda e \quad (\lambda \in B, \quad p(a) \text{ polynôme principal en } a).$$

L'application du théorème 32 donne :

THÉORÈME 35. — *Si, dans une algèbre à puissances principales uniques sur un domaine d'intégrité, l'élément a satisfait à une équation minima à droite de degré n , telle qu'on puisse réduire le coefficient de e à 1, a admet un inverse bilatère a' unique dans $(e, a, \dots, a^{n-1})$. Si de plus B est un corps, a' est unique dans le module des puissances principales.*

Cet inverse bilatère est $\frac{p(a)}{\lambda}$. En particulier :

THÉORÈME 36. — *Dans une algèbre A , de degrés finis à droite, à puissances principales uniques sur un corps, tout élément x de A admet, dans le module des puissances principales de x , ou bien aucun inverse ni à gauche ni à droite, ou bien un seul inverse bilatère, suivant que le coefficient de e dans l'équation minima de x est nul ou non.*

Ce théorème s'applique (théorème 1) en particulier aux algèbres algébriques flexibles (ou à puissances flexibles) sur un corps et, dans ce cas, supprime les possibilités IV et V du tableau T_2 .

CHAPITRE X

PUISSANCES NÉGATIVES

Particularisant l'étude des propriétés d'inversibilité des anneaux non associatifs, nous allons donner quelques propriétés de l'inverse bilatère d'un élément déterminé, en relation avec ses puissances successives, ce qui conduira à définir plusieurs sortes d'inverses bilatères.

80. — *Définition et notation.*

A est un anneau non associatif ayant un élément unité bilatère e , a est un élément de A tel qu'un inverse bilatère a' de a existe.

Nous appelons *puissance négative* de a toute puissance (finie) de a' .

En particulier, nous posons $a'^n = (a')^n$.

a'^n est à distinguer de $(a^n)'$ qui peut même ne pas exister.

81. — *Circonstances générales.*

La numération des puissances négatives de a , a' étant déterminé, est évidemment exactement aussi complexe, en général, que celle des puissances positives. Mais deux complications supplémentaires s'introduisent :

Il existe, en général, plusieurs inverses a' .

Le produit d'une puissance positive et d'une puissance négative de a n'est, en général, ni une puissance positive ni une puissance négative de a .

De plus, même dans un anneau à puissances associatives, l'associativité des puissances ne s'étend pas aux produits de puissances positives et négatives d'un élément. Autrement dit, si par exemple $p > q$, on a, en général, $ap^pa^q \neq ap^{p+q}$.

Par contre, dans des cas simples, les produits de puissances positives et négatives d'un élément appartiennent à certains modules de puissances positives et négatives de cet élément.

82. — *Exemples.*

L'algèbre VII (§ 74) est du second degré, donc à puissances associatives. Dans cet algèbre l'élément e_1 admet les inverses bilatères $e_1' = -e_1 + \lambda e_2$ (λ quelconque dans B). On a $e_1^2 e_1' = e_1 - \lambda e_2 \neq e_1$, si λ n'est pas nul.

Remarque. — On a $(e_1')' = (\lambda\mu + 1)e_1 + \mu e_2$ (μ quelconque dans B). Ainsi, en général, on n'a pas toujours $(x')' = x$.

Soit encore l'algèbre, non commutative, définie par :

TABLE XI

e	e_1	e_2	e_3
e_1	$-e$	$-e_1$	e_1
e_2	e_1	$-e$	e_2
e_3	$-e_1$	$-e_2$	$-e$

Elle est encore du second degré. L'élément e_1 admet les inverses bilatères $e_1' = -e_1 + \lambda(e_2 + e_3)$; on a $e_1^2 e_1' \neq e_1$ si λ n'est pas nul.

83. — *Inverses bilatères dans une algèbre de degré 2.*

Soient a et a' un élément et l'un de ses inverses bilatères, si l'algèbre est de degré 2 il existe dans B des éléments $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ tels que $a^2 = \alpha a + \beta e$, $a'^2 = \alpha' a' + \beta' e$.

Par suite on a $a^2a' = \alpha e + \beta a' = a'a^2$ et $a'^2a = \alpha'e + \beta'a = aa'^2$,
 $a^2a'^2 = \alpha\beta'a + (\alpha\alpha' + \beta\beta')e + \beta\alpha'a = a'^2a^2, \dots$, etc...

THÉOREME 37. — Dans toute algèbre de degré 2 toute sous-algèbre $[a, a']$ est commutative et on a $([a, a']) = (a, e, a')$. En général $[a, a']$ n'est pas associative.

Supposons que le coefficient δ de l'équation principale soit linéaire en x . On a alors $S_a(x, y) = \delta_y x + \delta_{xy} + \delta'_x y e$. Faisons $x = a, y = a'$ dans cette équation ; il vient :

$$(1) \quad 0 = \delta_{a'} a + \delta_a a' + (\delta'_{a, a'} - 2) e.$$

Les exemples ont montré que deux cas pouvaient se présenter.

1° $a' \notin (e, a)$.

D'après la relation (1) : ou bien a, a', e sont liés, ou bien a et a' sont canoniques et $\delta'_{a, a'} = 2$.

Remarquons que, dans une algèbre quelconque sur un corps, si $a \in (e)$ il en résulte $a' \in (e)$, car de $a = \lambda e$ il résulte, en multipliant par a , $\lambda a' = e$.

2° $a' \in (e, a)$.

On a alors $[a, a'] = [a]$. Donc en particulier, dans ce cas, le sous-anneau $[a, a']$ est effectivement associatif. De plus, il existe λ et μ dans B tels que $a' = \lambda e + \mu a$ d'où $0 = a'a - e = (\lambda + \alpha\mu) a + (\beta\mu - 1) e = 0$. Donc, pourvu que le couple (e, a) soit libre, μ est inversible dans B et on a aussi $[a] = [a']$; dans ce cas, le théorème 35 montre qu'il existe un seul inverse dans $[a]$. Nous appellerons cet inverse a_r^{-1} (cf. § 84).

Avec les notations du paragraphe 39, équation (5), on a $a = \delta_{a,a} a^{-1} + \delta_a e$; en multipliant par a_r^{-1} [et en posant $a^{-n} = (a^{-1})^n$] :

$$\delta_{a,a} a_r^{-2} = -\delta_a a_r^{-1} + e.$$

Cette relation et la relation (1) donnent (l'indice r est supprimé pour éviter les complications d'écriture) :

$$(2) \quad \delta_{a^{-1}} = -\delta_a \delta_{a,a}^{-1} ; \quad \delta_{a^{-1}, a^{-1}} = \delta_{a,a}^{-1} ; \quad \delta'_{a, a^{-1}} = 2 + \delta_a^2 \delta_{a,a}^{-1}.$$

En particulier, si B est un corps, on a (cf. théorème 36) :

THÉOREME 38. — Soit A une algèbre du second degré sur un corps. Si a admet un inverse dans $[a]$ cet inverse a_r^{-1} est bilatère et unique, le sous-anneau $[a, a_r^{-1}] = [a] = [a_r^{-1}]$ est associatif et on a les relations (2). Pour que a admette un inverse bilatère $a' \notin [a]$ il faut que a soit canonique, alors tout a' est aussi canonique.

84. — Inverses propres. Inverses absolus ou réciproques.

Nous appuyant sur les particularités rencontrées dans l'étude des algèbres de degré 2, nous classons les inverses bilatères d'un élément a de la façon suivante :

Un inverse propre de a sera tout inverse bilatère, a^{-1} , de a tel qu'on ait $a^{-1} \in [a]$.

Il en résulte (lemme 1) que les inverses propres de a sont caractérisés, parmi les inverses bilatères de a , par l'inclusion :

$$[a^{-1}] \subset [a] .$$

D'après cette relation, si $[a]$ est associatif, il en est de même de $[a, a^{-1}]$. Ainsi, en appelant *puissance négative propre* de a toute puissance de a^{-1} , on a :

THÉORÈME 39. — *L'associativité des puissances d'un élément a s'étend aux produits de puissances positives et de puissances négatives propres de a . De même ces produits sont commutatifs (flexibles) si les puissances de a sont commutatives (flexibles).*

Ce théorème justifie, dans le cas des anneaux à puissances associatives, la notation a^{-1} , puisque, dans ce cas, en généralisant d'une façon évidente la convention précédente (§ 80) on a :

$$a^p a^{-q} = a^{p-q} .$$

Un *inverse absolu* ou *réciroque* de a sera tout inverse propre a_r^{-1} de a tel qu'on ait $a \in [a_r^{-1}]$.

Il en résulte (corollaire 1) que les réciroques de a sont caractérisés, parmi les inverses bilatères de a , par la relation :

$$[a_r^{-1}] = [a] .$$

Dans toute algèbre (contenant e), e est réciroque* de lui-même.

Un *inverse impropre*, $a^{(-1)}$, de a sera inverse bilatère de a , tel qu'on ait $a^{(-1)} \notin [a]$.

Nous désignerons par a' un inverse bilatère pour lequel il sera indifférent ou impossible, à priori, de préciser la qualité.

Exemples. — Paragraphes 82 et 88.

85. — **LEMME 9.** — *Dans toute algèbre à puissances quasi-associatives sur un corps F , si un élément a de degré $n + 1$ admet un inverse propre a^{-1} :*

1° a^{-1} est unique.

2° Ou bien $a^{-1} = a_r^{-1}$. Ou bien a^{-1} est de degré inférieur à $n + 1$.

En effet, dans les conditions de ce lemme, on a $([a]) = (e, a, \dots, a^n)$ et le théorème 36 indique qu'il existe qu'un inverse dans $[a]$. On a alors :

$$a^{-k} = \sum_{i=0}^n \alpha_{ik} a^i \quad (k = 1, \dots, n, \quad \alpha_{ik} \in F) .$$

En éliminant $a^2, \dots, a^n$ entre ces relations, on obtient une équation de la forme :

$$\gamma a + \sum_{i=0}^n \beta_i a^{-i} = 0 \quad (\gamma \in F, \quad \beta_i \in F) .$$

Si $\gamma \neq 0$ il en résulte $a \in [a^{-1}]$ et $a^{-1} = a_r^{-1}$.

Si $\gamma = 0$ a^{-1} est au plus de degré n .

Inverses bilatères dans une algèbre de 3^{ème} degré.

6. — Le lemme 9 montre immédiatement que, dans une algèbre à cubes uniques du 3^{ème} degré sur un corps de caractéristique différente de 2 (théorème 26, 2^o), tout inverse propre est unique et qu'il est absolu à moins, peut être, qu'il ne soit du second degré. En effet, a^{-1} ne peut appartenir à (e) que s'il en est de même pour a et on a alors évidemment $a^{-1} = a^{-1}_e$.

7. — *Etude de la sous-algèbre $[a, a']$ dans le cas général.*

Soit A une algèbre du 3^{ème} degré à droite sur B, de caractéristique première à 2. Faisons $x=y=a$, $z=a'$ puis $x=a^2$, $y=z=a'$, dans la relation (L₃) (§ 57). Il vient d'après l'hypothèse sur la caractéristique :

$$a^2a' = \delta_{a^2,a'} + (\delta_{a^2,a'} - 2) a + (2\delta_a + \frac{1}{2}\delta_{a^2,a,a'}) e + \delta_{a^2,a} a' ,$$

puis

$$\begin{aligned} (a^2a' + a'a^2) a' + a'^2a^2 &= \delta_{a^2,a'} (a^2a' + a'a^2) + \delta_{a^2,a'} a^3 + \frac{1}{2} \delta_{a^2,a',a'} e \\ &\quad + \delta_{a^2,a'} a + \delta_{a^2,a'} a'^2 , \end{aligned}$$

les divisions par 2 indiquées étant évidemment possibles (théorème 19, § 50).

Supposons de plus que A soit également du 3^{ème} degré à gauche (ou seulement qu'il le soit ainsi pour la sous-algèbre $[a, a']$). Il en résulte :

$$(a^2a', a'a^2, a^2a'^2, a'^2a^2) \subseteq (a^2, a, e, a', a'^2) .$$

Or tout produit de puissances de a et de a' se réduit à une combinaison linéaire, sur B, de produits de puissances de a et de a' de degré inférieur à 3, donc, d'après l'inclusion ci-dessus, à une combinaison linéaire, sur B, de produits des éléments a^2, a, e, a', a'^2 , ou enfin, en utilisant à nouveau cette inclusion, à une combinaison linéaire de ces cinq mêmes éléments :

THÉORÈME 40. — *Dans toute algèbre de caractéristique première à 2, du 3^{ème} degré à gauche et à droite, si a désigne un élément quelconque, on a :*

$$([a, a']) = (a^2, a, e, a', a'^2) .$$

De plus, si les équations principales de A coïncident, on a $a^2a' = a'a^2$ et $(a^2a' + a'a^2) a' + a'^2a^2 = a' (a^2a' + a'a^2) + a^2a'^2$, d'où $a'^2a^2 = a^2a'^2$, et d'après le théorème précédent :

THÉORÈME 41. — *Dans toute algèbre à cubes uniques, vérifiant les conditions du théorème 40, toute sous-algèbre $[a, a']$ est commutative.*

Les théorèmes 40 et 41 sont encore valables pour les algèbres de degré 3 satisfaisant aux conditions de la remarque finale de la Deuxième Partie (§ 64).

88. — *Exemples.*

Nous allons montrer, qu'en général, on ne peut réduire davantage $([a, a'])$. En effet l'algèbre $[a, a']$ sur B définie par la table suivante :

TABLE XII

e	a	a^2	a'	a'^2
a	a^2	e	e	e
a^2	e	λa	e	e
a'	e	e	a'^2	e
a'^2	e	e	e	0

est du 3^{ème} degré pourvu que $\lambda = 0$. Il suffit de le vérifier pour tout élément $x = \xi_1 a + \xi_2 a^2 + \xi_3 a' + \xi_4 a'^2$. On a :

$$x^3 = 2 (\xi_1 \xi_2 + \xi_1 \xi_3 + \xi_1 \xi_4 + \xi_2 \xi_3 + \xi_2 \xi_4 + \xi_3 \xi_4) x + (\xi_1^3 + \xi_1^2 \xi_3 + \xi_1^2 \xi_4 + \xi_1 \xi_3^2 + \xi_1 \xi_3 \xi_4 + \xi_1 \xi_4^2 + \xi_3^3) e .$$

Exemples d'inverses. — Dans l'algèbre XII :

a^2 est un *réciproque* de a si $\lambda \neq 0$ est inversible dans B,

a^2 est un *inverse propre*, mais non absolu, de a si $\lambda = 0$,

a' est un *inverse impropre* de a , il en est de même de a'^2 .

Il résulte encore de cet exemple que, dans une algèbre du 3^{ème} degré, contrairement à ce qui se passe dans les algèbres du second degré, même lorsque l'inverse d'un élément est absolu, les produits de puissances positives et négatives ne sont pas associatifs, en général. En effet, la sous-algèbre $[a]$ est du 3^{ème} degré dans tous les cas et n'est pas associative.

89. — *Inverse bilatère dans un anneau flexible.*

THÉORÈME 42. — Dans tout anneau flexible de caractéristique première à 2, tout sous-anneau $[a, a']$ est commutatif.

Cela résulte du théorème 3 (§ 14) car $aa' = a'a$.

SECTION II

ÉTUDE DES ALGÈBRES SYMÉTRIQUES

Alors que dans les anneaux non associatifs les plus généraux l'inverse bilatère d'un élément joue peu de rôle puisque son existence est exceptionnelle (§ 74), il suffit de particulariser, assez peu (chapitre IX) l'anneau, pour qu'il réapparaisse. En nous fondant sur ce fait, nous introduisons et nous étudions les algèbres non associatives où tout élément admet un inverse bilatère. Ces algèbres constituent, suivant les restrictions imposées à l'inverse, plusieurs généralisations des corps gauches (cf. inclusions §§ 103 et 111).

CHAPITRE XI

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES - PREMIÈRE CLASSIFICATION

A. — ALGÈBRES SYMÉTRIQUES GÉNÉRALES

90. — DÉFINITION 8. — Un domaine A sera dit algèbre symétrique si :

1° A est une algèbre (non associative), ayant un élément unité bilatère e , sur un anneau B associatif, commutatif et ayant un élément unité 1 ; comme précédemment on prendra B isomorphe à B_e .

2° Tout élément $a \neq 0$ de A admet un inverse bilatère a' .

Il n'est pas exclu que a admette plusieurs inverses bilatères.

91. — Régularité.

VON NEUMANN { 31 } appelle anneau régulier un anneau (associatif) A tel qu'à tout élément a de A corresponde b de A avec $aba = a$, cette définition se généralise immédiatement pour les anneaux flexibles. Pour les anneaux non associatifs quelconques B. BROWN et N.-H. MAC COY (référence citée renvoi 1, § 1) ont donné la définition suivante.

Un élément a d'un anneau (non associatif) A est régulier si et seulement si $a \in F(a)$: $F(a)$ est l'ensemble de toutes les sommes finies $\sum_k (aP_k)(a\Lambda_k)$, $P_k(\Lambda_k)$ étant un produit fini d'une ou plusieurs multiplications à droite (gauche), A est régulier si tous ses éléments sont réguliers. On a manifestement :

Toute algèbre symétrique constitue un anneau régulier.

Remarque. — Une algèbre telle que chacun de ses éléments (non nuls) admette soit un inverse à gauche, soit un inverse à droite, jouit, évidemment, de la même propriété.

92. — Absence d'idéaux.

THÉORÈME 43. — Une algèbre symétrique n'a ni idéal propre à droite ni idéal propre à gauche.

Soit en effet I un idéal à droite de l'algèbre A et i un élément non nul de I . Il existe dans A un élément i' tel que $ii' = e$, et comme $ii' \in I$ on a $I = A$. Démonstration analogue pour les idéaux à gauche.

Remarque. — Il est clair que la démonstration n'exige pas l'existence d'un inverse bilatère mais seulement que tout élément (non nul) soit inversible à gauche et à droite.

COROLLAIRE 13. — Si une algèbre symétrique d'ordre n contient une sous-algèbre S d'ordre $n - 1$, S contient nécessairement un élément unité et cet élément unité est le même que celui de A .

Si en effet S ne contenait pas l'élément unité e de A , on aurait $(A) = (S) + (e)$. Mais S serait un idéal propre de A car si s est quelconque dans S et a quelconque dans A on a $a = t + \lambda e$ ($t \in S, \lambda \in B$) et par suite $sa \in S$ et $as \in S$.

93. — Nature de l'anneau B .

THÉOREME 44. — Dans une algèbre A symétrique, B -module :

1° B est un domaine d'intégrité.

2° Si on peut définir une extension A_F de A , sur le corps F des quotients de B , telle que A_F soit une algèbre (non associative), F -module, contenant A , alors l'anneau A est isomorphe à l'anneau A_F .

3° Si A admet une base sur B , B est un corps.

1° Soit $\mu \neq 0$ quelconque dans B , μe appartient à A et possède (au moins) un inverse m dans A . On a $(\mu e) m = m (\mu e) = e$ c'est-à-dire :

$$(1) \quad \mu m = e.$$

Si μe et νe ont comme inverses m et n , mn est un inverse de $\mu \nu e$. En effet, en multipliant membre à membre la relation (1) par $\nu n = e$ il vient $(\mu m) (\nu n) = e$, d'où $(\mu \nu) (mn) = e$. Si B n'était pas un domaine d'intégrité, il existerait dans B deux éléments $\mu \neq 0$, $\nu \neq 0$ tels que $\mu \nu = 0$, d'où $0 = (\mu \nu) (mn) = e$.

2° Si A_F existe, A contient un corps $F \times e$, isomorphe à F .

En effet, l'extension A_F sera définie à partir des conditions suivantes :

I) Si $\varphi \in F$, $a \in A$ on a $\varphi \times a \in A_F$ et si $\varphi \in B$ on doit avoir $\varphi \times a = \varphi a$. Il en résulte en particulier $1 \times a = a$.

L'égalité dans A_F sera définie de façon à comprendre comme cas particulier l'égalité dans A .

II) Soient $c \in A_F$, $d \in A_F$; $c \times d$ sera défini de façon que si c et d appartiennent aussi à A , on ait $c \times d = cd$.

Par exemple, si A admet une base sur B , A_F existe : A_F est l'ensemble des éléments $\Sigma \varphi \times a$ avec la multiplication $c \times d = (\Sigma \varphi \times a) \times (\Sigma \psi \times b) = \Sigma (\varphi \psi) \times ab$, φ et ψ appartenant à F .

Multiplions dans A_F , la relation (1) membre à membre par μ^{-1} , on a successivement

$$\begin{aligned} \mu^{-1} \times (\mu m) &= \mu^{-1} \times e, \\ \mu^{-1} \times (\mu m) &= (\mu^{-1} \mu) \times m = 1 \times m = m, \\ m &= \mu^{-1} e. \end{aligned}$$

Pour tout φ de F , il existe μ et ν dans B tels qu'on ait $\varphi = \nu \mu^{-1}$ et par suite on peut écrire :

$$\varphi \times e = (\nu \mu^{-1}) \times e = \nu \times (\mu^{-1} e) = \nu \times m = \nu m \in A.$$

On a donc :

$$F \times e \subset A.$$

Il en résulte que A peut être considéré comme un F -module car A_F est un F -module et $\varphi \times a = \varphi \times (ea) = (\varphi \times e) \times a = (\varphi \times e) a \in A$.

Exemple. — Le corps des nombres rationnels peut être considéré comme une algèbre symétrique sur $B = [1]$, définie par les éléments $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, les a_i formant la suite dénombrable des nombres rationnels r : $0 < r < 1$ et le produit $a_i a_j$ étant le nombre rationnel $a_i a_j = a_k$. Les a_i ne forment pas une base, mais tout nombre rationnel est de la forme λa_i ($\lambda \in B$). On a dans ce cas $B \subset F = A$.

3° Si A admet une base $a, b, \dots$, on peut écrire $e = \varepsilon_a a + \varepsilon_b b + \dots$, $l = \alpha a + \beta b + \dots$ et l'équation $\lambda l = e$ donne les relations :

$$(2) \quad \lambda \alpha = \varepsilon_a, \quad \lambda \beta = \varepsilon_b, \dots$$

les ε n'étant pas tous nuls. Supposons, par exemple, $\varepsilon_a = \varepsilon \neq 0$, il existe alors dans B une fonction $\alpha(\lambda)$ telle qu'à tout $\lambda \neq 0$ de B corresponde ε avec $\lambda \alpha(\lambda) = \varepsilon$. Il résulte évidemment de cette relation $\lambda \alpha(\varepsilon \lambda) = 1$ ce qui montre que B est identique à son corps des quotients.

94. — Par suite on peut prendre comme base de A : $a=e, b, \dots$ et les relations (2) où $1 = \varepsilon_a, 0 = \varepsilon_b = \dots$ démontrent le :

THÉORÈME 45. — *Dans toute algèbre symétrique, F-module, tout élément non nul du corps Fe a un inverse bilatère unique et cet inverse appartient à Fe .*

95. — D'après le théorème 30, toute algèbre alternative où tout élément non nul a un inverse à gauche et un inverse à droite est symétrique à division (cf. § 101). Donc en particulier :

THÉORÈME 46. — *Toute algèbre symétrique alternative est une algèbre symétrique à division.*

B. — ALGÈBRES MONOSYMMÉTRIQUES ET ALGÈBRES SYMMÉTRIQUES A DIVISION

96. — *Algèbres monosymétriques.*

DÉFINITION 9. — Nous appelons algèbre monosymétrique une algèbre symétrique dans laquelle tout élément non nul admet un seul inverse bilatère.

Il est clair qu'on a alors pour tout $x \neq 0$: $(x')' = x$.

97. — *Condition nécessaire de monosymétrie.*

Pour qu'une algèbre soit monosymétrique, il faut qu'elle ne contienne pas d'éléments proprement orthogonaux. En effet si on avait $ab = ba = 0$ avec $a \neq 0, b \neq 0$, l'élément a admettant un inverse bilatère a' admettrait également l'inverse bilatère $a' + b$.

En général, la condition n'est pas suffisante. En effet considérons l'algèbre, sur un corps K , par exemple le corps des nombres rationnels, définie par la table suivante :

TABLE XIII

e	a	a^2
a	a^2	$\alpha e + \alpha a$
a^2	$-\alpha e - \alpha a$	φa

φ n'étant pas un cube dans K et α n'étant pas nul.

1) Il n'y a pas, dans l'algèbre XIII, de diviseurs bilatères de zéro.

En effet puisque $2\alpha \neq 0$, l'orthogonalité de $x \neq 0$ et de x' entraîne, avec les notations habituelles :

$$\xi_1 \xi_2 - \xi_1' \xi_2' = 0 ,$$

$$\begin{pmatrix} \xi_0 & \alpha \xi_2 & -\alpha \xi_1 \\ \xi_1 & \xi_0 + \alpha \xi_2 & -\alpha \xi_1 + \varphi \xi_2 \\ \xi_2 & \xi_1 & \xi_0 \end{pmatrix} \vec{\xi}' = 0 ,$$

avec $\vec{\xi}' = \{\xi_0', \xi_1', \xi_2'\}$ (l'accolade désigne un vecteur colonne).

1° $x \in (e)$, il vient immédiatement $x' = 0$.

2° $x \notin (e)$. Si x' n'était pas nul, on aurait $\{\xi_1', \xi_2'\} = k \{\xi_1, \xi_2\} \neq 0$ ($k \in K$). Il en résulte soit $\xi_1 (\xi_0' + \xi_1') = 0$, soit $\xi_1' - \varphi \xi_2' = 0$ suivant que ξ_0' est nul ou non. C'est impossible.

II) L'algèbre XIII n'est pas monosymétrique.

En effet, c'est une algèbre du 3^{ème} degré et du 3^{ème} ordre non commutative (voir théorème 69) : elle n'est pas symétrique.

98. — Cas où la condition nécessaire est aussi suffisante.

THÉOREME 47. — Pour qu'une algèbre A symétrique soit monosymétrique il faut et il suffit qu'elle ne contienne pas d'éléments proprement orthogonaux.

En effet si un élément a de A admettait deux inverses bilatères distincts a' et b' , on aurait $a' - b' \neq 0$ et $(a' - b')a = a(a' - b') = 0$ ce qui est impossible. Donc A est monosymétrique.

THÉOREME 48. — Pour qu'une algèbre A sur un corps F , à puissances principales uniques, de degrés finis à droite sur F , soit monosymétrique il faut et il suffit que A ne contienne pas d'éléments proprement orthogonaux. A est alors absolument symétrique (voir § 104, définition 10, 2° et § 109).

1° A contient un élément unité e sinon le polynôme minimum à droite d'un élément $a \neq 0$ se décomposerait en deux facteurs (dont a) proprement orthogonaux.

2° Pour la même raison, le terme constant du polynôme minimum à droite de tout élément est différent de 0, ce qui démontre la proposition (cf. théorème 35).

9. — *Algèbre sans diviseurs bilatères de zéro.*

Nous appelons ainsi une algèbre A sans diviseurs *propres* bilatères de zéro. Supposons en plus que A ait une base finie sur un corps F . Soient τ_i ($i=1, \dots, m$) des indéterminées et $T = F(\tau_1, \dots, \tau_m)$ le corps des fractions rationnelles en τ_i à coefficients dans F . A_T désignera l'extension scalaire de A sur T ($\{3\}$, p. 15).

LEMME 10. — *Toute extension scalaire transcendante de degré fini de A est sans diviseurs bilatères de zéro.*

Car si C et D non nuls appartiennent à A_T , C et D sont chacun le quotient de deux polynômes en τ_i à coefficients dans A et si $CD = DC = 0$ il en résulte une relation analogue entre les polynômes des numérateurs de C et de D , d'où aussi une relation analogue entre les coefficients de plus haut degré de ces polynômes. Cette dernière relation est impossible car A étant sans diviseurs bilatères de zéro, l'un au moins de ces coefficients serait nul.

THÉORÈME 49. — 1° *Toute algèbre A sans diviseurs bilatères de zéro à puissances principales uniques dont au moins un élément (non nul) est de degré fini sur B contient un élément unité e .*

2° *Si de plus l'algèbre A admet une base finie sur un corps F , le polynôme principal P de A n'a pas de racines dans $L = F(\xi_1, \dots, \xi_n)$. (n étant l'ordre de A sur F .)*

1° Si A ne contenait pas e , dans les conditions indiquées il existerait un élément ($\neq 0$) $\in A$ admettant un polynôme minimum à droite $p(a)a$ et l'on aurait $p(a) = p(a)a = 0$ $a \neq 0$ d'où $p(a) = 0$.

2° Si P avait une racine $\Delta \in L$ on aurait :

$$P = (x - \Delta e) Q = Q (x - \Delta e) = 0 \quad (Q \in L[x])$$

avec $x - \Delta e \neq 0$, $Q \neq 0$, ce qui est impossible car A_L n'a pas de diviseurs bilatères de zéro (lemme 10).

COROLLAIRE 14. — *Le degré principal de toute algèbre réelle ayant une base finie, puissances principales uniques, sans diviseurs bilatères de zéro, est pair.*

On a de même :

THÉORÈME 50. — *Dans une algèbre sur B , sans diviseurs bilatères de zéro, à puissances principales uniques, le polynôme minimum à droite de tout élément a de degré fini à droite n'a pas de racines dans B .*

En particulier si $B = R$ (corps des nombres réels) le polynôme minimum à droite de a est de degré pair.

Du fait évident : *Toute sous-algèbre d'une algèbre sans diviseurs bilatères de zéro est elle-même sans diviseurs bilatères de zéro*, il résulte :

THÉORÈME 51. — *Soit A une algèbre sans diviseurs bilatères de zéro à puissances associatives sur un corps F . Pour tout x de A , $[x]$ est un corps. Le polynôme minimum de tout élément de degré fini est irréductible sur F . Si A a une base finie sur F le polynôme principal de A est irréductible sur $L = F(\xi_1, \dots, \xi_n)$.*

En effet $[x]$ est associatif, commutatif et sans diviseurs de zéro. Ainsi en particulier (théorème 47) une telle algèbre est monosymétrique.

COROLLAIRE 15. — *Toute algèbre réelle, sans diviseurs bilatères de zéro, à puissances associatives, de degrés finis est du second degré.*

100. — *Sous-algèbre d'une algèbre monosymétrique.*

De la propriété d'où découle le théorème 51 il résulte aussi que *toute sous-algèbre symétrique d'une algèbre monosymétrique A est monosymétrique*. Mais il n'est pas vrai que toute sous-algèbre de A soit symétrique. En effet, l'algèbre sur $[1]$ de l'exemple du § 93 est une algèbre monosymétrique dont $[1]$ est une sous-algèbre non symétrique.

101. — *Algèbres symétriques à division.*

Une algèbre *symétrique à division* est une algèbre symétrique où la division est toujours possible et unique (sauf la division par 0).

Les algèbres symétriques à division constituent la généralisation la plus restreinte, au cas non associatif, des corps gauches.

Pour qu'une algèbre soit une algèbre symétrique à division, il faut que tout élément non nul admette un inverse à gauche et un inverse à droite uniques et égaux. Si l'algèbre a une base finie sur un corps, cette condition est aussi *suffisante* (théorème 31).

102. — Une algèbre symétrique à division est évidemment monosymétrique. La réciproque est fausse (table IX, cf. § 133) mais :

THÉORÈME 52. — *Toute algèbre A monosymétrique commutative ayant une base finie est une algèbre symétrique à division.*

En effet dans A il n'y a pas de diviseurs propres bilatères de zéro donc pas de diviseurs propres de zéro ni à droite ni à gauche. Par suite tout élément admet un inverse à gauche et un inverse à droite uniques et égaux. Enfin A monosymétrique ayant une base est une algèbre sur un corps (théorème 44, 3^o) et la remarque du paragraphe précédent s'applique.

THÉORÈME 53. — *Toute algèbre flexible à division est une algèbre symétrique à division.*

Cela résulte immédiatement du tableau T₂.

103. — *Exemples. Ordination par inclusion de trois ensembles d'algèbres symétriques.*

L'algèbre définie par la table VIII (ou algèbre VIII) n'est pas symétrique (quel que soit l'anneau B).

L'algèbre VII sur un corps réel K quelconque est une algèbre symétrique (voir théorème 65, 2^o ; § 121) qui n'est pas monosymétrique (§ 82).

L'algèbre IX sur K est monosymétrique (théorème 78, § 133) mais non symétrique à division en général (§ 76).

Les algèbres XV (voir § 135) sur R (corps des nombres réels) sont symétriques à division mais non associatives en général.

Il en résulte qu'en désignant respectivement par $\{A_s\}$, $\{A_m\}$, $\{A_d\}$, $\{A_g\}$ les catégories des algèbres qui sont respectivement symétriques, monosymétriques, symétriques à division et les corps gauches on a, schématiquement, les inclusions étant strictes :

$$\{A\} \supset \{A_s\} \supset \{A_m\} \supset \{A_d\} \supset \{A_g\} .$$

Remarque. — L'algèbre VII étant symétrique sur un corps réel, il en résulte (remarque § 82) que même dans une algèbre symétrique on n'a pas toujours $(x')' = x$.

CHAPITRE XII

DEUXIÈME CLASSIFICATION DES ALGÈBRES SYMÉTRIQUES

A. — ALGÈBRES PROPREMENT SYMÉTRIQUES ALGÈBRES ABSOLUMENT SYMÉTRIQUES

104. — Définitions. Propriétés.

DÉFINITIONS 10. — *Nous appelons :*

1° *Algèbre proprement symétrique, toute algèbre symétrique telle que l'un au moins des inverses bilatères, de tout élément (non nul) de l'algèbre, soit propre (§ 84).*

2° *Algèbre absolument symétrique, toute algèbre symétrique telle que l'un au moins des inverses bilatères, de tout élément (non nul) de l'algèbre, soit absolu.*

THÉORÈME 54. — *Toute sous-algèbre (contenant l'élément unité e de l'algèbre) d'une algèbre proprement symétrique, est proprement symétrique. Réciproquement, si une algèbre symétrique jouit de cette propriété, elle est proprement symétrique.*

THÉORÈME 55. — *Toute sous-algèbre (contenant e) d'une algèbre absolument symétrique est absolument symétrique. Réciproquement, si une algèbre symétrique jouit de cette propriété, elle est absolument symétrique.*

Démonstrations. — Soit A une algèbre proprement symétrique ou absolument symétrique et S une sous-algèbre de A , si $s \in S$ il existe un élément $s^{-1} \in [s]$; mais $[s] \subset S$ pourvu que $e \in S$. Donc s^{-1} existe dans S . Si A est absolument symétrique, on a de plus $[s^{-1}] = [s]$. Les réciproques sont évidentes en remarquant qu'en particulier les sous-algèbres monogènes sont respectivement proprement et absolument symétriques.

Il résulte alors du théorème 46 :

THÉORÈME 56. — *Toute sous-algèbre alternative, contenant l'élément unité e , d'une algèbre proprement symétrique, est une algèbre symétrique à division.*

En particulier :

COROLLAIRE 16. — *Dans toute algèbre proprement symétrique à puissances associatives, toute sous-algèbre monogène est un corps (et par suite l'inverse propre de tout élément est unique).*

Car toute $[x]$ de l'algèbre est alors symétrique, associative et commutative.

En particulier (cf. théorème 60) :

COROLLAIRE 17. — *Toute algèbre proprement symétrique à puissances associatives est absolument symétrique.*

COROLLAIRE 18. — *Dans toute algèbre proprement symétrique, sur un anneau B , ce anneau est un corps.*

Car B est isomorphe (par définition) à Be qui est une sous-algèbre monogène (cf. corollaire 16).

Il résulte aussi du corollaire 17 :

COROLLAIRE 19. — *Toute algèbre réelle proprement symétrique, à puissances associatives, de degrés finis, est du second degré.*

Les corollaires 15 et 19 soulignent l'importance particulière des algèbres du second degré (cf. corollaire 7, 1^o, puis §§ 53, 54, 56, 83 et chapitre XIV).

105. — Algèbres proprement symétriques à puissances quasi-associatives.

THÉORÈME 57. — *Dans une algèbre A proprement symétrique à puissances quasi-associatives et de degré finis à droite sur F , le polynôme minimum à droite de tout élément n'appartenant pas à (e) n'admet pas de facteur linéaire dans F .*

En effet, soit $\xi = \varphi$ un facteur linéaire du polynôme minimum à droite, de degré n , de a . Soit $b = a - \varphi e$. On a $[b] = [a]$ (lemme 2) et $bp(b) = p(b)b = 0$ où $p(b)$ est un polynôme principal de degré $n - 1$ en b . Il en résulte (corollaire 12) que b n'a pas d'inverse dans $[b]$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

COROLLAIRE 20. — *Dans une algèbre proprement symétrique, réelle, à puissances quasi-associatives et de degrés finis à droite, tout élément n'appartenant pas à (e) a une équation minima à droite de degré pair. Si A est de degré principal fini, le polynôme principal de A est de degré pair.*

COROLLAIRE 21. — *Si une algèbre A symétrique, réelle, à puissances quasi-associatives est d'ordre n et de degré principal n , n est nécessairement pair.*

En effet, pour le corollaire 21, il existe $a \in A$ tel que $[a] = A$ et la démonstration du théorème 57 s'applique à cet élément (sans faire intervenir la symétrie propre).

106. — Sous-algèbre d'une algèbre symétrique.

Nous allons montrer que, pour les algèbres symétriques générales (même sur un corps), le théorème analogue aux théorèmes 54 et 55 n'est pas vrai, autrement dit : il n'est pas vrai que dans toute algèbre symétrique (même sur un corps) toute sous-algèbre soit symétrique. Il en résulte qu'il n'est pas vrai non plus que toute algèbre symétrique soit proprement symétrique (ni à fortiori absolument symétrique).

En effet, considérons l'algèbre A sur le corps $(0, 1)$ des entiers modulo 2, définie par la table V (§ 57). A contient la sous-algèbre $N = (e, a^2)$ qui est isomorphe à l'algèbre des nombres complexes (généralisés) sur $(0, 1)$ et qui n'est donc pas symétrique. Cependant A est symétrique, en effet ses éléments non nuls sont indiqués dans le tableau suivant avec leurs inverses, les éléments de la seconde ligne étant les inverses de ceux de la première :

e	a	$e + a$	a^2	$e + a^2$	$a + a^2$	$e + a + a^2$
e	$e + a^2$	$a + a^2$	a^2	a et $e + a + a^2$	$e + a$	$e + a^2$

Remarque. — En prenant comme base de la sous-algèbre N les éléments e et $b = e + a^2$ on a $b^2 = 0$, N est donc aussi isomorphe à l'algèbre des nombres duaux (généralisés) sur $(0, 1)$ et l'algèbre A réalise une immersion de cette algèbre avec diviseur propre bilatère de zéro dans une algèbre symétrique d'ordre 3. Au contraire, nous montrerons (théorème 71) qu'il est impossible de réaliser une telle immersion si le corps F n'est pas de caractéristique 2.

En revanche, on a les résultats suivants :

107. — THÉORÈME 58. — *Toute algèbre algébrique symétrique à division sur un corps est absolument symétrique.*

En effet, soit A une algèbre satisfaisant aux conditions du théorème. Toute $[x] \subset A$ est sans diviseurs de zéro et d'ordre fini sur un corps donc est une algèbre à division. Les équations $x_g x = e$ et $x x_d = e$ sont résolubles dans $[x]$ et d'une façon unique dans A . Donc $x^{-1} = x_g = x_d$ et comme $[x]$ est monosymétrique elle est aussi absolument symétrique (voir théorème 60) : $x_g = x_d = x_r^{-1}$.

THÉORÈME 59. — *Toute algèbre algébrique A à puissances flexibles, à division sur un corps, est absolument symétrique.*

En effet, toute $[x] \subset A$ est une algèbre flexible sans diviseurs de zéro, d'ordre fini sur un corps, donc flexible à division et par suite (théorème 53) symétrique à division et enfin absolument symétrique (théorème 58).

Remarque. — Un corps envisagé comme algèbre sur $[1]$ n'est généralement pas proprement symétrique.

B. — RELATIONS ENTRE LA MONOSYMETRIE, LA SYMETRIE PROPRE ET LA SYMETRIE ABSOLUE

108. — THÉORÈME 60. — *Toute algèbre à la fois proprement symétrique et monosymétrique est aussi absolument symétrique.*

En effet, dans une algèbre proprement symétrique et monosymétrique à tout élément x (non nul) correspond un élément $x^{-1} \in [x]$, à x^{-1} correspond $(x^{-1})^{-1} \in [x^{-1}]$, mais l'inverse étant unique $(x^{-1})^{-1} = x$. Donc $x^{-1} = x_r^{-1}$.

109. — THÉORÈME 61. — *Toute algèbre monosymétrique à puissances principales uniques, de degrés finis à droite, sur un corps est absolument symétrique.*

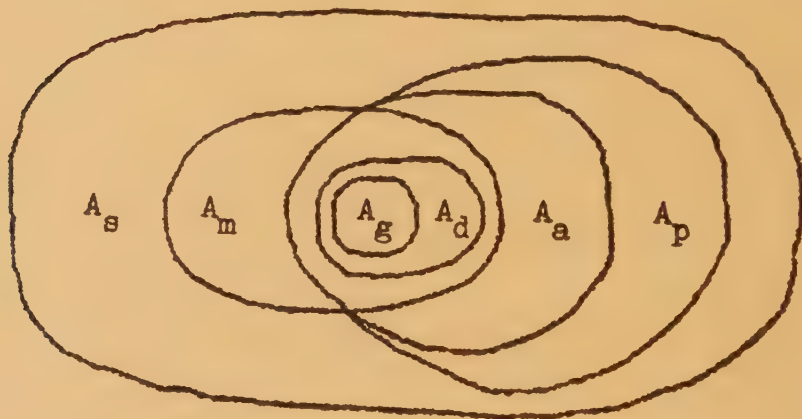
Ce théorème résulte : 1° de la démonstration du théorème 48 qui montre que l'inverse bilatère d'un élément a appartient au module des puissances principales de a ; 2° du théorème 60.

110. — *Comparaison des deux classifications.*

Il résulte de certaines des propriétés obtenues (notamment corollaire 17, théorèmes 60 et 61) que, dans les principaux cas, on a les graphiques ci-après. Les indices de A sont les initiales des qualificatifs des algèbres considérées, sauf en ce qui concerne A_d et A_g qui signifient respectivement : *algèbre symétrique à division* et *corps gauche*.

Algèbres algébriques sur un corps.

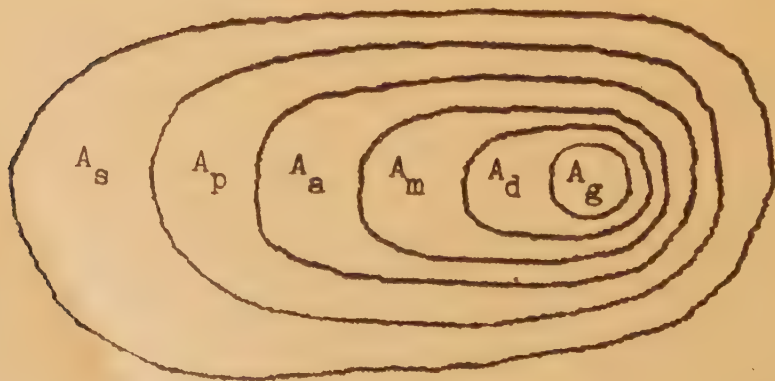
I



De plus on a montré que certains des *compléments* qu'on peut définir dans cette famille d'ensembles ne sont pas vides (§§ 103 et 106).

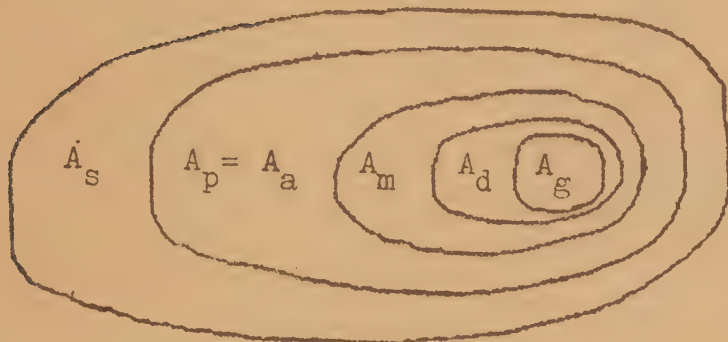
*Algèbres à puissances principales uniques,
de degrés finis à droite sur un corps.*

II



Algèbres à puissances associatives.

III



CHAPITRE XIII

EXPRESSIONS ANALYTIQUES DES CONDITIONS
DE SYMÉTRIE ET DE MONOSYMÉTRIE

11. — *Cas d'une base dénombrable.*

Nous nous plaçons dans le cas où l'algèbre A admet une base dénombrable sur B qui est alors un corps F (théorème 44, 3°). Soit $(e_0, e_1, e_2, \dots)$ une base de A , $e_0 = e$ étant élément unité. La table de multiplication est supposée définie par des relations de la forme :

$$e_i e_j = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{ijk} e_k \quad (i, j = 0, 1, 2, \dots, \gamma_{ijk} \in F) .$$

Puisque e_0 est élément unité, on a :

$$\gamma_{0jk} = \delta_{jk}, \quad \gamma_{i0k} = \delta_{ik} \quad (i, j, k = 0, 1, 2, \dots) .$$

Posons :

$$\gamma'_{ijo} = \gamma_{ijo} \leftarrow \gamma_{jio} .$$

Soient $x = \sum_{i=0} \xi_i e_i$ et $x' = \sum_{i=0} \xi'_i e_i$ un élément et l'un de ses inverses bilatères dans A . En exprimant que $xx' = x'x = e$ et en tenant compte des relations (1) et (2) et

de la convention (3), il s'introduit les vecteurs suivants dont les coordonnées sont des formes linéaires des ξ_i :

$$\begin{aligned}\vec{Y}_0 &= \{ \xi_0, 0, \xi_1, \dots, \xi_k, \dots, \xi_1, \dots, \xi_k, \dots \}, \\ \vec{Y}_i &= \{ \sum \xi_j \gamma_{ij0}, \sum_{i \neq j} \xi_j \gamma_{ij0}, \sum \xi_j \gamma_{ij1}, \dots, \xi_0 + \sum \xi_i \gamma_{ij1}, \dots, \sum \xi_j \gamma_{ijk}, \dots \\ &\quad \dots, \sum \xi_j \gamma_{ji1}, \dots, \xi_0 + \sum \xi_j \gamma_{ji1}, \dots, \sum \xi_j \gamma_{jik}, \dots \} \\ &\quad (i = 1, 2, \dots; \quad k > i).\end{aligned}$$

Les signes Σ sont relatifs à l'indice j et les sommes sont prises de $j = 1$ jusqu'à l'infini. Pour que l'algèbre A soit symétrique, il faut et il suffit que les γ soient tels que l'équation

$$(4) \quad \xi_0 \vec{Y}_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \vec{Y}_i = \vec{U}$$

ait au moins une solution $\vec{\xi}$ quel que soit le vecteur $\vec{\xi} \neq 0$: $\vec{U}$ est le vecteur dont la première coordonnée est 1 et les autres 0, $\vec{\xi}$ et $\vec{\xi}'$ ont comme coordonnées ξ_i et ξ'_i ($i = 0, 1, 2, \dots$).

Pour que l'algèbre soit monosymétrique, il faut et il suffit que, de plus, la solution soit unique.

Si l'algèbre est commutative, le système (4) contient une équation évanouissante et des équations écrites deux fois : on peut remplacer les $\vec{Y}$ par des vecteurs plus simples (par exemple $\vec{Y}_0$ par $\vec{\xi}$).

112. — Cas d'une base finie.

Nous supposons que A soit d'ordre $n+1$ sur F . Soient $\vec{V}_0; \vec{V}'_0; \vec{V}_1, \dots, \vec{V}_n; \vec{V}'_1, \dots, \vec{V}'_n$ les vecteurs lignes de la matrice $(\vec{Y}_0, \vec{Y}_1, \dots, \vec{Y}_n)$.

LEMME 11. — Pour que l'algèbre A soit symétrique, il faut et il suffit que $\vec{V}_0$ n'appartienne pas à $W = (\vec{V}'_0; \vec{V}_1, \dots, \vec{V}'_n)$.

La condition est nécessaire : si $\vec{V}_0 \in W$ on a $\vec{\xi} \cdot \vec{V}_0 = 0 \neq 1$. La condition est suffisante : en effet, pour que le système (4) (avec $i = 1, \dots, n$) soit résoluble, il suffit que toute relation linéaire existant éventuellement entre les premiers membres soit vérifiée par les seconds membres, ce qui a toujours lieu si $\vec{V}_0$ n'appartient pas à l'espace W .

113. — Cas d'une algèbre monosymétrique ayant une base finie.

L'algèbre A étant supposée monosymétrique, les solutions $\vec{\xi}_j$ ($j = 1, \dots, n$) ne sont pas quelconques, mais on a :

THÉORÈME 62. — Dans toute algèbre monosymétrique d'ordre $n+1$ sur un corps F contenant plus de $(n+1)(n+2)$ éléments distincts, l'inverse bilatère x' de l'élément général x peut se mettre sous la forme :

$$x' = g^{-1}(\xi_i) \sum_{j=0}^n f_j(\xi_i) e_j,$$

où $g(\xi_i)$ est un polynôme homogène de degré $r \leq n + 1$, sur F par rapport aux variables $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$ et où les $f_j(\xi_i)$ sont des polynômes homogènes de degré $r - 1$ par rapport à ces mêmes variables. De plus $g(\xi_i)$ ne s'annule jamais dans F , sauf pour $\xi_0 = \xi_1 = \dots = \xi_n = 0$.

En effet, les coordonnées ξ'_j de x' sont des fonctions des ξ_i ($i = 1, \dots, n$) toujours bien définies sauf pour $\xi_0 = \xi_1 = \dots = \xi_n = 0$ et dans ce cas elles n'existent pas.

1° Pour tout système de valeurs (non toutes nulles) des ξ_i les équations (4) se réduisent (1) à un système de Cramer S_{ξ_i} . Dans tout domaine E des ξ_i tel que S_{ξ_i} reste formé des mêmes équations, les formules de résolution sont de la forme :

$$\xi'_j = \frac{p^E(\xi_i) f_j^E(\xi_i)}{p^E(\xi_i) g^E(\xi_i)} = \frac{f_j^E(\xi_i)}{g^E(\xi_i)},$$

le numérateur et le dénominateur de la première fraction étant de degrés respectifs n et $n + 1$. Les polynômes p^E, g^E, f_j^E sont homogènes et dépendent, à priori, du domaine E . De plus g^E et f_j^E sont premiers entre eux dans leur ensemble, dans $F[\xi_0, \dots, \xi_n] = U$. Dans un autre domaine E' on aura de même :

$$\xi'_j = \frac{p^{E'} f_j^{E'}}{p^{E'} g^{E'}} = \frac{f_j^{E'}}{g^{E'}}$$

Or le domaine E est formé des valeurs des ξ_i pour lesquelles on a $h = p^E g^E \neq 0$. De même E' est caractérisé par $h' = p^{E'} g^{E'} \neq 0$. Les équations $h = 0, h' = 0$ ont, au plus, chacune $n + 1$ racines en ξ_{n+1} (par exemple), qui sont des fonctions de $\xi_0, \dots, \xi_n$. Si on a simultanément $h \neq 0$ et $h' \neq 0$ les deux formules donnant les ξ'_j sont valables. Supposons que $f_j^{E'} g^E$ et $f_j^E g^{E'}$ ne soient pas identiques ($j = 0, \dots, n$). Dans ce cas, les équations :

$$f_j^{E'} g^E = f_j^E g^{E'} \quad (j = 0, \dots, n)$$

auraient, chacune, au plus, $n(n + 1)$ racines en ξ_{n+1} . Donnons des valeurs aux ξ_i . Alors ξ_{n+1} ne pourrait prendre dans le corps F que $n + 1 + n + 1 + n(n + 1) = n + 1)(n + 2)$ valeurs, au plus, contrairement à l'hypothèse. Donc on a dans U :

$$f_j^{E'} g^E = f_j^E g^{E'} \quad (j = 0, \dots, n; \text{ les } f \text{ et } g \text{ appartiennent à } U).$$

Comme $f_0^E, \dots, f_n^E, g^E$ d'une part et $f_0^{E'}, \dots, f_n^{E'}, g^{E'}$ d'autre part sont premiers entre eux dans leur ensemble dans U on a, à un facteur dans F près :

$$f_j^{E'} = f_j^E = f_j \quad (j = 0, \dots, n); \quad g^{E'} = g^E = g.$$

2° Si $g(\xi_i)$ s'annulait dans F pour des valeurs non toutes nulles des ξ_i , le déterminant du système S correspondant à ces valeurs s'annulerait, ce qui est impossible.

COROLLAIRE 22. — Dans toute algèbre A monosymétrique réelle d'ordre n les coordonnées de l'inverse x' de l'élément général x de A se réduisent aux quotients de polynômes homogènes de degré $2p - 1$ par un polynôme homogène de degré $2p \leq n$.

(1) Après suppression des équations inutiles.

Ainsi, dans une algèbre monosymétrique réelle d'ordre impair, il y a toujours réduction des fractions rationnelles coordonnées de x .

114. — *Algèbres sans diviseurs bilatères de zéro.*

Pour qu'une algèbre n'admette pas de diviseurs propres bilatères de zéro, il faut et il suffit que le système (5) qui est déduit de (4) en remplaçant $\vec{U}$ par 0 n'admette que la solution 0 quel que soit $\xi \neq 0$.

Dans le cas des algèbres non commutatives, cette circonstance est plus générale que celle impliquée par les conditions de symétrie (cf. § 97).

115. — *Algèbres symétriques à division.*

Pour qu'une algèbre symétrique d'ordre n soit symétrique à division, il faut et il suffit que l'équation $x'x = 0$ ait pour seule solution $x' = 0$ pour tout $x \neq 0$, c'est-à-dire, avec la notation habituelle ($x'x = x'\Gamma_x$) : $\det \Gamma_{x \neq 0} \neq 0$.

Soit $p(x)x + N(x)e$ ($N(x) \in F[\xi_i]$) le polynôme principal à droite (de degré p) de l'algèbre, ce polynôme divise le polynôme caractéristique (§ 40) dont le coefficient de e est $\det \Gamma_x$. Donc en particulier :

$$(6) \quad \det \Gamma_x = Q(x) \cdot N(x),$$

$Q(x)$ étant une forme, sur F , de degré total $n - p$ par rapport aux coordonnées de x . Par suite, pour que l'algèbre soit à division, il faut et il suffit que $Q(x)$ et $N(x)$ soient non nuls pour tout x non nul.

116. — Si on a une famille d'algèbres *proprement symétriques* et à puissances quasi-associatives, la condition nécessaire et suffisante pour que l'une d'elles soit à division se réduit à $Q(x) \neq 0$ pour tout $x \neq 0$, l'autre condition étant remplie d'elle-même (théorème 57). Le polynôme $Q(x)$ satisfait à une identité due à DICKSON {14} : soient τ_{ij} ($i=0, \dots, n-1$) le déterminant mineur du $(i+1)^{\text{ème}}$ élément de la première colonne de la matrice Γ_x et $y = \sum_{i=0}^{n-1} \tau_{ij} e_i$. On a évidemment $y\Gamma_x = \det \Gamma_x e$ et l'identité à laquelle on a fait allusion est :

$$(7) \quad y = -Qp(x).$$

CHAPITRE XIV

ALGÈBRES SYMÉTRIQUES DU SECOND DEGRÉ

Nous considérons dans ce chapitre des algèbres symétriques A du second degré ayant une base finie sur un anneau B qui est donc un corps F .

117. — THÉORÈME 63. — *Toute algèbre symétrique A du second degré d'ordre fini sur un corps F de caractéristique différente de 2 est absolument symétrique.*

Il suffit de démontrer que A est proprement symétrique (théorème 38). Si a est un élément quelconque de A , il existe (Deuxième Partie, lemme 6) un élément λ de F tel que $a - \lambda e = a_1$ soit canonique.

Il suffit de démontrer que $a_1^2 = \xi_1 e \neq 0$. En effet, on pourra alors écrire tout inverse a' de a sous la forme $a' = \mu e + \rho a_1 + a_2$ avec $a_2^2 = \beta_2 e$ et $a_1 a_2 + a_2 a_1 = 0$. Mais la relation $aa' = a'a = 0$ donne $a_1 a_2 = a_2 a_1 = 0$ d'où, la caractéristique étant différente de 2 : $a_1 a_2 = a_2 a_1 = 0$ et l'équation $aa' = e$ se réduit à $a(\mu e + \rho a_1) = e$: il existe bien un a^{-1} .

Montrons donc que les hypothèses « $a_1^2 = 0$ » et « A symétrique » conduisent à une absurdité.

En effet a_1 n'a alors évidemment pas d'inverse dans $[a_1]$ et par suite en admet un, soit e_2 , en dehors : $a_1 e_2 = e_2 a_1 = e$. Comme a_1 est canonique, il en est de même de e_2 (théorème 38) $e_2^2 = \gamma_2 e$. Donc e, a_1, e_2 forment une sous-algèbre N . Nous verrons (§ 126, démonstration du théorème 71) que N ne peut être symétrique et que les éléments $u = \omega_0 e + \omega_1 a_1 + \omega_2 e_2$ pour lesquels on a à la fois $\omega_0 \neq 0, \omega_1 = (2\omega_2)^{-1}(\omega_0^2 - \beta_2 \omega_2^2)$ n'ont pas d'inverse dans N . Or, pour qu'un élément b de N admette un inverse en dehors de $[b]$ et à fortiori en dehors de N , il faut (théorème 38) qu'il soit canonique, donc que $\xi_0 = 0$. Donc les éléments u n'ont pas d'inverse, non plus, en dehors de N .

C. Q. F. D.

COROLLAIRE 23. — Dans toute algèbre symétrique du second degré et d'ordre fini sur un corps F de caractéristique différente de 2, toute sous-algèbre monogène est un corps quadratique sur F .

Cela résulte du théorème précédent et du théorème 55.

118. — Rappelons que le théorème 38 (qui n'exige pas que la base soit finie) montre l'unicité de l'inverse bilatère de tout élément *non canonique*.

Tout inverse a' d'un élément canonique peut s'écrire :

$$a' = a_r^{-1} + b$$

est orthogonal à a et les espaces (b) et $([a])$ sont disjoints (d'après la démonstration du théorème 63). Il peut effectivement exister des éléments $b \neq 0$ (§ 82).

119. — Le théorème 63 n'est pas généralisable à une algèbre où tout élément est inversible unilatéralement (d'une façon au moins) ou *algèbre* U : une sous-algèbre d'une algèbre U n'est pas toujours une algèbre U . Considérons en effet l'algèbre sur un corps réel K définie par :

e	e_1	e_2	e_3
e_1	0	$-e$	0
e_2	e	$-e$	e
e_3	0	$-e$	$-e$

TABLE XIV

C'est une algèbre U. En effet, avec les notations habituelles, on a $\det \Gamma_x = \det \Delta_x = \xi_0^2 (\xi_0^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2)$. Donc si $\xi_0 \neq 0$ tout élément a un inverse à gauche et un inverse à droite. Si $\xi_0 = 0$, alors $\xi_0' = 0$ et il reste pour déterminer les inverses à gauche et les inverses à droite, respectivement, les équations :

$$\begin{aligned} -\xi_2 \xi_1' + (\xi_1 - \xi_2 + \xi_3) \xi_2' - (\xi_2 + \xi_3) \xi_3' &= 1, \\ \xi_2 \xi_1' - (\xi_1 + \xi_2 + \xi_3) \xi_2' + (\xi_2 - \xi_3) \xi_3' &= 1, \end{aligned}$$

qui ont toujours au moins une solution pourvu que $x \neq 0$. En particulier, il existe un inverse à gauche $(e_1)_g$ et un inverse à droite $(e_1)_d$ de e_1 tels que $(e_1)_g = -(e_1)_d = e_2$.

La sous-algèbre $[e, e_1, e_2]$ est de même une algèbre U.

Cependant la sous-algèbre $[e, e_1]$ n'est évidemment pas une algèbre U.

120. — D'après le théorème 46 et un résultat d'ALBERT (§ 8 théorème 1 : Toute algèbre alternative à droite de degré 2 sur un corps F de caractéristique différente de 2 est alternative), on a :

THÉORÈME 64. — *Toute algèbre symétrique du second degré, d'ordre fini sur un corps F de caractéristique différente de 2, qui est alternative à droite (gauche) est une algèbre symétrique à division.*

Il est à remarquer que si F est le corps des nombres réels, ce théorème ne donne que les algèbres connues : nombres complexes, quaternions et nombres de Cayley.

121. — **THÉORÈME 65 et DÉFINITION 11.**

1° *Étant donnée une algèbre A symétrique, du second degré, d'ordre fini sur un corps F de caractéristique différente de 2, il existe une extension scalaire A_E admettant la base $\{e, e_i\}$ avec :*

$$e_i^2 = -e, \quad e_i e_j = -e_j e_i \quad (j \neq i).$$

Si F est le corps R des nombres réels, l'algèbre A elle-même admet cette base.

2° *Inversement, appelons algèbre P toute algèbre admettant la base précédente : toute algèbre P d'ordre fini sur un corps réel K est absolument symétrique.*

1° En effet, choisissons une base canonique (théorème 20). Toute $[e_i]$ est un corps (corollaire 23) et par suite (1) β_i n'est pas le carré d'un nombre dans F. En particulier si $F = R$, on a $\beta_i < 0$. En posant $e_i' = \frac{e_i}{\sqrt{-\beta_i}}$ on obtient la base du théorème (en supprimant les accents). Dans le cas général, il suffit de considérer une extension E de F où tous les éléments $-\beta_i$ aient une racine carrée.

2° Appelons I : *conjugué* d'un élément x l'élément $\bar{x}$ défini avec une base canonique par $\bar{x} = 2 \xi_0 e - x$;

(1) On pose (cf. § 52, cas $n = 2$) $e_i^2 = \beta_i e$.

II : *partie imaginaire* de x la différence $x - \xi_0 e$. (Ces définitions peuvent être rendues intrinsèques : si $x^2 = \lambda x + \mu e$ on a $\lambda = 2 \xi_0$). On a ⁽¹⁾ dans une algèbre P :

$$x\bar{x} = \bar{x}x = N(x) = \xi_0^2 + \xi_1^2 + \dots + \xi_n^2.$$

Ainsi le polynôme principal de A est $x^2 - 2x\xi_0 + N(x)$ et tout $x \neq 0$ de A admet le réciproque $x_r^{-1} = \frac{\bar{x}}{N(x)}$.

22. — Algèbres monosymétriques.

La simple application du théorème 48 montre qu'on a :

THÉORÈME 66. — *Pour qu'une algèbre du second degré sur un corps soit monosymétrique, il faut et il suffit qu'elle ne contienne pas d'éléments proprement orthogonaux.*

Considérons donc une algèbre du second degré A : pour que cette algèbre soit monosymétrique, il faut et il suffit que les équations $xt = tx = 0$ entraînent $t = 0$ pour tout $x \neq 0$. Exprimons cette condition dans une base canonique. D'après le théorème 38 on peut se borner à faire ⁽¹⁾ $\xi_0 = 0$ dans x . On obtient alors si la caractéristique est différente de 2, en appelant θ_i ($i = 0, \dots, n$) les coordonnées de t :

$$\xi_i \theta_0 = 0 \quad (i = 1, \dots, n),$$

$$(1) \quad \sum_{i=1}^n \beta_i \xi_i \theta_i = 0 \quad (\text{on a posé } e_i^2 = \beta_i e, \beta_i \in F),$$

$$(2) \quad \sum_{i < j} (\xi_i \theta_j - \xi_j \theta_i) e_i e_j = 0 \quad (i, j = 1, \dots, n).$$

Comme $x \neq 0$, le premier système exige $\theta_0 = 0$ (ce qui ne fait que vérifier la dernière proposition du théorème 38 : l'inverse d'un élément canonique est canonique), il reste les $n + 2$ dernières équations [équations (1) et (2)].

Si A est une algèbre P , on fait $\beta_i = 1$ ($i = 1, \dots, n$) dans l'équation (1) qui exprime alors que les vecteurs $(\vec{\xi}_i)$ et $(\vec{\theta}_i)$ ($1 \leq i \leq n$) sont perpendiculaires. Plaçons-nous sur un corps réel K : pour que la perpendicularité de deux vecteurs entraîne la nullité de l'un d'eux, il faut et il suffit que les vecteurs soient également colinéaires. Par suite :

LEMME 12. — *Pour qu'une algèbre P d'ordre fini sur un corps réel K soit monosymétrique, il faut et il suffit que le système (2) implique $(\vec{\theta}_i) = k(\vec{\xi}_i)$ pour tout vecteur $(\vec{\theta}_i) \neq 0$ ($k \in K$).*

D'autre part, si x et y désignent deux éléments arbitraires de A , on a :

$$xy - yx = 2 \sum_{i < j} (\xi_i \eta_j - \xi_j \eta_i) e_i e_j.$$

Ainsi, d'après la définition de la partie imaginaire d'un élément (II, § 121) dans une algèbre du second degré, si la partie imaginaire d'un élément a est proportionnelle

(1) On a pris comme base : $(e_0 = e, e_1, \dots, e_n)$.

(dans B) à la partie imaginaire d'un élément b , ces éléments commutent (dans toute algèbre du second degré). La réciproque n'est pas vraie, en général, mais d'après le lemme précédent on a :

THEOREME 67. — *Pour qu'une algèbre P d'ordre fini sur un corps réel K soit monosymétrique, il faut et il suffit que les parties imaginaires de tout couple d'éléments commutants soient proportionnelles dans K.*

123. — *Eléments satisfaisant à une même équation minima.*

Si on a, à la fois, $a^2 = \alpha a + \beta e$ et $b^2 = \alpha b + \beta e$ il en résulte :

$$\begin{aligned}(\bar{a} - b)(a - b) - (ab - ba) &= 0, \\(a - b)(\bar{a} - b) + (ab - ba) &= 0.\end{aligned}$$

Par suite : si a et b commutent, $a - b$ et $\bar{a} - b$ sont des diviseurs bilatères de zéro. Il en résulte que si l'algèbre est monosymétrique et si $a \neq b$ on a nécessairement $b = \bar{a}$.

THEOREME 68. — *Dans une algèbre monosymétrique de degré 2, si deux éléments distincts commutent et ont même polynôme minimum, ils sont conjugués.*

C'est le cas où le coefficient de proportionnalité du théorème 67 est égal à -1 .

124. — *Algèbres symétriques à division.*

Pour qu'une algèbre symétrique d'ordre n , du second degré, soit une algèbre symétrique à division, il faut et il suffit (§ 116) qu'on ait $Q(x) = [N(x)]^{-1}$ et $\Gamma_x \neq 0$ pour tout $x \neq 0$. On a ici $p(x) = x - 2\xi_0 e$, d'où, en particulier, en égalant les coefficients de e dans la formule (7) du chapitre XIII (§ 116) :

$$(3) \quad Q(x) = \frac{\eta_0(x)}{\xi_0}$$

$\eta_0(x)$ est le déterminant d'ordre $n - 1$ mineur du 1^{er} élément de la 1^{ère} colonne de Γ_x et $Q(x)$ une forme de degré $n - 2$ par rapport aux coordonnées de x .

CHAPITRE XV

ALGÈBRES SYMÉTRIQUES D'ORDRES DEUX, TROIS ET QUATRE

125. — *Algèbres symétriques d'ordre 2.*

Elles sont associatives et commutatives et par conséquent sont des corps :

1° Si le corps F est de caractéristique différente de 2, les algèbres considérées sont isomorphes au corps (e, e_1) avec $e_1^2 = \gamma e$, γ n'étant pas un carré dans F (§10, chapitre II, p. 108).

2° Si F est de caractéristique 2 on obtient un nouveau corps de caractéristique 2. Par exemple, si $F = (0, 1)$ (corps des entiers modulo 2), on obtient le corps (e, e_1) sur F , corps composé des éléments $0, e, e_1, e + e_1$, avec $e_1^2 = e + e_1$. En considérant l'algèbre symétrique d'ordre 2 sur ce corps, puis de nouveau l'algèbre symétrique d'ordre 2 sur le corps ainsi formé, etc..., on obtient (à un isomorphisme près) tous les corps finis de caractéristique 2 (**10**, chapitre V, § 11, n° 4, p. 168).

126. — Algèbres symétriques d'ordre 3.

THÉORÈME 69. — *Toute algèbre A symétrique d'ordre 3 est ou bien du second degré (et donc à puissances associatives) ou bien commutative.*

En effet, si A n'est pas du second degré, il existe un élément a de A tel que $[a] = A$. Soit b un inverse de a . Si on avait $b \in (e, a)$ le polynôme minimum de a serait du second degré et on aurait $[a] \subset A$ contrairement au choix de a . Ainsi on peut prendre (e, a, b) comme base de A qui est donc commutative.

THÉORÈME 70. — *Les seules algèbres symétriques réelles d'ordre 3 sont du second degré et par suite sont isomorphes aux algèbres P d'ordre 3.*

En effet, d'après le théorème précédent, ces algèbres sont à fortiori à puissances quasi-associatives : le corollaire 21 s'applique.

THÉORÈME 71. — *Toute algèbre A symétrique d'ordre 3 sur un corps F de caractéristique différente de 2 est proprement symétrique. Le polynôme minimum à droite de chacun de ses éléments est irréductible sur F . Tout élément de A admet un inverse propre unique. De plus, tout élément qui n'est pas absolument inversible est du 3^{ème} degré et son inverse propre est du second degré.*

En effet, si A n'était pas proprement symétrique, elle contiendrait une sous-algèbre du second ordre non symétrique qui contiendrait l'élément unité e de A (corollaire 13) et qui serait isomorphe à une algèbre M de base (e, e_1) avec, soit $e_1^2 = e$, soit $e_1^2 = 0$.

1° Cas $e_1^2 = e$. Les éléments $\lambda(e \pm e_1)$ n'ont pas d'inverse dans M . Prenons pour e_2 un inverse de $e - e_1$, on a $e_1 e_2 = e_2 e_1 = -e + e_2$. Alors $e + e_1$ devrait avoir un inverse dans $A = [e, e_1, e_2]$. Soit $(e + e_1)' = u + \mu e_2$ ($u \in M, \mu \in F$) puisque $(e + e_1)u$ appartient à M et qu'on a $(e + e_1)(\mu e_2) = -\mu e + 2\mu e_2$ il en résulte $2\mu = 0$ d'où $\mu = 0$, ce qui est impossible.

2° Cas $e_1^2 = 0$. Les éléments λe_1 n'ont pas d'inverse dans M . Prenons pour e_2 un inverse de e_1 et soit :

$$e_2^2 = \gamma_0 e + \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 \quad .$$

D'après le lemme 11 pour que, dans la famille d'algèbres déterminée par cette équation, il existe, au moins, une algèbre symétrique, il faut et il suffit que l'on puisse déterminer $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ de façon que le vecteur $\vec{V}_0(\xi_0, \xi_2, \xi_1 + \gamma_0 \xi_2)$ soit extérieur à l'espace vectoriel W des vecteurs $\vec{V}_1(\xi_1, \xi_0, \gamma_1 \xi_2)$ et $\vec{V}_2(\xi_2, 0, \xi_0 + \gamma_2 \xi_2)$ quel que soit $\vec{\xi} \neq 0$. W est à 2 dimensions sauf si l'on a :

$$\text{ou bien } \begin{cases} \xi_0 = 0 \\ \xi_2 = 0 \end{cases} , \quad \text{ou bien } \begin{cases} \xi_0 = 0 \\ \gamma_2 \xi_1 - \gamma_1 \xi_2 = 0 \end{cases} .$$

Soient (D_1) et (D_2) les variétés de l'espace (ξ_0, ξ_1, ξ_2) représentées par ces équations [(D₁) est une droite, (D₂) est une droite ou un plan]. Le déterminant des vecteurs $\vec{V}_0, \vec{V}_1, \vec{V}_2$ ne doit s'annuler que sur (D_1) et (D_2) . Or ce déterminant s'annule (uniquement) pour :

$$(1) \quad \xi_1 = \frac{\xi_0^3 + \gamma_{20}^2 \xi_2^2 - \gamma_{02} \xi_0 \xi_2^2 + \gamma_{12} \xi_2^3}{2 \xi_0 \xi_2 + \gamma_{22} \xi_2^2}.$$

Quels que soient les γ ce cône contient d'autres points que ceux de (D_1) et de (D_2) pourvu que la caractéristique de F soit différente de 2. Donc A est proprement symétrique.

Le théorème 57 s'applique alors et le polynôme minimum à droite de tout élément est irréductible sur F . Soit a un élément quelconque de A . L'inverse propre a^{-1} de a est unique (lemme 9, § 85). Ou bien a est de degré inférieur à 3 et, dans ce cas, l'inverse propre de a est absolu (théorème 38). Ou bien a est de degré 3 et, si l'inverse propre a^{-1} n'est pas un inverse absolu, a^{-1} est du second degré (lemme 9) et admet un inverse propre unique qui ne peut être a .

Si la condition sur la caractéristique de F est supprimée, le théorème n'est, en général, plus vrai (exemple § 106).

127. — *Interprétation géométrique.*

Il est clair que les propriétés de divisibilité d'une algèbre A d'ordre n sur B sont liées à la distribution des éléments x qui rendent inversibles, dans B , $\det \Gamma_x$ et $\det \Delta_x$ (Γ_x et Δ_x étant respectivement les matrices de multiplication par x à gauche et à droite). En particulier si B est un corps F , les propriétés de divisibilité de A sont liées à la distribution des points dans F des hypersurfaces algébriques de degré n dont les équations homogènes sont :

$$\det \Gamma_x = 0, \quad \det \Delta_x = 0.$$

Par exemple, pour que A soit une algèbre à division, il faut et il suffit que l'une (quelconque) de ces variétés n'ait pas de points dans F (par suite si cette condition est remplie par l'une des variétés, elle l'est aussi par l'autre). Si A est commutative, on a $\Gamma_x = \Delta_x$, et les deux hypersurfaces sont confondues en une seule (Γ) .

Supposons de plus que A (commutative) contienne un élément unité $e = e_0$ et appelons alors $n + 1$ l'ordre de A . Pour que l'algèbre A soit symétrique il faut et il suffit, d'après le lemme 11 (§ 112), que les deux conditions suivantes soient réalisées :

1^o (Γ) n'a pas d'autres points dans F que les points P pour lesquels l'espace W des vecteurs $\vec{V}_1, \dots, \vec{V}_n$ (cf. § 112) ait moins de n dimensions.

2^o $\vec{V}_0(P)$ n'appartient pas à $W(P)$.

Nous allons montrer que, dans le cas des algèbres d'ordre 3, cette deuxième condition est incluse dans la première. En effet, s'il n'existe pas de points P , A est une algèbre à division. Supposons qu'il existe au moins un point P , soit P_0 dans F et qu'on ait $\vec{V}_0(P_0) \in W(P_0)$, la matrice Γ_x serait, en P_0 , de rang $n - 1 = 1$ et par suite P_0 serait un point double (dans F) de (Γ) qui est une cubique plane. Or les points P sont soit

alignés, soit au nombre de trois. P_0 ne peut d'ailleurs pas être un point triple, par suite, pourvu que F ne soit pas isomorphe au corps $(0, 1)$ des entiers modulo 2, (Γ) contiendrait au moins un point dans F autre que les points P .

THÉOREME 72. — *Pour qu'une algèbre commutative (avec élément unité) d'ordre 3 sur un corps F non isomorphe au corps $(0, 1)$, soit symétrique, il faut et il suffit que sa cubique (Γ) n'ait pas d'autres points dans F que les points P .*

Précisons la correspondance entre A et (Γ) . Appelons (e_0, e_1, e_2) une base de A , γ_{ijk} la $k^{\text{ème}}$ coordonnée du produit $e_i e_j$, mais pour que nos notations coïncident avec celles de la géométrie analytique, désignons, exceptionnellement, l'élément général de A par $X = xe_0 + ye_1 + ze_2$. La cubique (Γ) a comme équation :

$$\det \Gamma_x = \alpha_3 x^3 + \alpha_2 x^2 y + \alpha_1 x y^2 + \alpha_0 y^3 + \beta_2 x^2 z + \beta_1 x y z + \beta_0 y^2 z \\ + \gamma_1 x z^2 + \gamma_0 y z^2 + \delta_0 z^3 = 0 ,$$

avec, en posant $(\gamma_{thi} \gamma_{ljk}) = \gamma_{thi} \gamma_{ljk} - \gamma_{thk} \gamma_{lji}$, les relations :

$$\alpha_3 = 1, \quad \alpha_2 = \gamma_{111} + \gamma_{122}, \quad \alpha_1 = (\gamma_{111} \gamma_{122}) - \gamma_{110}, \quad \alpha_0 = (\gamma_{112} \gamma_{120}) , \\ \beta_2 = \gamma_{121} + \gamma_{222}, \quad \beta_1 = (\gamma_{111} \gamma_{222}) - 2 \gamma_{120}, \quad \beta_0 = (\gamma_{112} \gamma_{220}) + (\gamma_{110} \gamma_{121}) , \\ \gamma_1 = (\gamma_{121} \gamma_{222}) - \gamma_{220}, \quad \gamma_0 = (\gamma_{122} \gamma_{220}) + (\gamma_{110} \gamma_{221}) , \\ \delta_0 = (\gamma_{120} \gamma_{221}) .$$

Les coordonnées des points P sont définies par :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \gamma_{112} y^2 - (\gamma_{111} - \gamma_{122}) y - \gamma_{121} , \\ \gamma_{112} y^3 + (\gamma_{111} - 2 \gamma_{122}) y^2 + (2 \gamma_{121} - \gamma_{222}) y + \gamma_{221} = 0 , \\ z = 1 , \end{array} \right.$$

dans le cas général, et par :

$$x + \gamma_{122} y + \gamma_{121} z = 0$$

si l'on a à la fois : $\gamma_{112} = \gamma_{111} - 2 \gamma_{122} = 2 \gamma_{121} - \gamma_{222} = \gamma_{221} = 0$.

Inversement, les équations faisant passer de A à (Γ) n'étant pas toutes linéaires, ne sont généralement pas résolubles dans F par rapport aux γ . En revanche, à toute cubique (Γ) telle qu'on ait les relations :

$$\alpha_3 = 1 , \quad \beta_1 = \alpha_2 \beta_2 - \alpha_0 \delta_0 - 2 , \quad \beta_0 = - \alpha_0 \gamma_1 + \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 , \\ \gamma_0 = - \alpha_1 \delta_0 + \alpha_2 \gamma_1 - \beta_2 ,$$

on peut faire correspondre l'algèbre A définie par :

$$\gamma_{110} = - \alpha_1 , \quad \gamma_{111} = \alpha_2 , \quad \gamma_{112} = \alpha_0 , \quad \gamma_{120} = 1 , \quad \gamma_{121} = 0 , \\ \gamma_{122} = 0 , \quad \gamma_{220} = - \gamma_1 , \quad \gamma_{221} = \delta_0 , \quad \gamma_{222} = \beta_2 .$$

Cette algèbre contient au moins un élément (e_1) possédant un inverse (e_2) tel que e_0, e_1 et e_2 forment une base de Λ . Toute algèbre symétrique (d'ordre 3) qui n'est pas du second degré peut se mettre sous cette forme (cf. § 126).

En particulier, toute algèbre Λ qui est symétrique sans être absolument symétrique contient un élément (e_1) n'admettant pas d'inverse absolu et par suite tel que son inverse propre soit du second degré ; on a donc, dans ce cas, $\gamma_{112} \neq 0$, $\gamma_{221} = 0$, c'est-à-dire, pour la courbe (Γ) : $\alpha_0 \neq 0$, $\delta_0 = 0$. Les points P sont : l'origine O et les points P_1 et P_2 tels que :

$$P_1, P_2 \quad \left\{ \begin{array}{l} x = -\beta_2 \\ \alpha_0 y^2 - \alpha_2 y + \beta_2 = 0 \end{array} \right.$$

La parallèle à Oy menée par P_1 et P_2 recoupe (Γ) en Q ($-\beta_2, \gamma_1$). Il est donc nécessaire que Q soit confondu avec l'un des points P ; Q ne peut être en O car (e, e_2) formerait une sous-algèbre isomorphe aux nombres duaux généralisés (cf. § 126). Appelons P_2 le point avec lequel Q est confondu : P_1 est alors le tangentiel de P_2 . Le triangle OP_1P_2 inscrit à (Γ) doit également être circonscrit à cette cubique. Or, dès que P_2 et Q sont confondus, P_1 est aussi le tangentiel de O . Il en résulte que le triangle OP_1P_2 doit dégénérer, c'est-à-dire qu'on doit avoir soit O et P_1 confondus, soit P_1 et P_2 confondus. Ces conditions se traduisent, pour l'algèbre A , par les conditions nécessaires :

$$Q = P_2, O = P_1 \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma_{222} = 0 \\ \gamma_{111} = -\gamma_{112}\gamma_{220} \end{array} \right.,$$

ou bien :

$$Q = P_2 = P_1 \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma_{222} = \gamma_{112}\gamma_{220}^2 \\ \gamma_{111} = -2\gamma_{112}\gamma_{220} \end{array} \right.$$

La condition pour que les points P ne soient pas des points doubles donne dans tous les cas $\gamma_{220} \neq 0$ et, dans le premier cas $\gamma_{110}\gamma_{220} \neq 1$, dans le second cas $\gamma_{110}\gamma_{220} + \gamma_{112}^2\gamma_{220}^3 \neq 1$.

ALGÈBRES SYMÉTRIQUES D'ORDRE QUATRE

128. — Propriétés préliminaires.

LEMME 13. — Toute algèbre symétrique d'ordre 4 et de degré 3 à droite est aussi de degré 3 à gauche.

Si le lemme était faux il existerait une algèbre symétrique A et un élément a de A tel que l'on ait $A = (e, a, a^2, aa^2)$ avec $a^2a \in (e, a, a^2)$; a admet un inverse bilatère a' .

1° On ne peut avoir $a' \in (e, a, a^2)$ sinon il existerait dans F trois éléments non tous nuls α, β, γ tels que $e = \alpha a + \beta a^2 + \gamma aa^2 = \alpha a + \beta a^2 + \gamma a^2 a$ ce qui est impossible sinon, dans tous les cas, e, a, a^2 et aa^2 ne seraient pas indépendants. Par suite a' contient un terme en aa^2 et comme $a'a = e$ il en résulte :

$$(aa^2) a \in (e, a, a^2) .$$

2° Soient $x = \xi_0 e + \xi_1 a$ ($\xi_0 \xi_1 \neq 0$), et $x' = \xi'_0 e + \xi'_1 a + \xi'_2 a^2 + \xi'_3 aa^2$ un inverse de x ; on a, d'après l'appartenance précédente, $e = x'x = y + \xi_0 \xi'_3 aa^2$, y ne contenant pas

de terme en aa^2 . Par suite on a $\xi_3 = 0$ si $\xi_0 \neq 0$. De $xx' = x'x = 0$ on déduit alors $\xi_1\xi_2(aa^2 - a^2a) = 0$ et par suite $\xi_2 = 0$ dès que $\xi_1 \neq 0$ d'où $x' \in (e, a)$ mais, puisque $xx' = e$, il en résulterait que a est du second degré au plus, ce qui est faux.

C. Q. F. D.

Remarque. — Nous pouvons encore dire d'après cette démonstration : *Il n'existe pas d'algèbre symétrique ayant comme base (e, a, a^2, a^3) si $aa^2 \in (e, a, a^2)$.*

LEMME 14. — *Si une algèbre symétrique d'ordre 4 sur un corps quelconque contient une sous-algèbre du 3^{ème} ordre et du 3^{ème} degré, cette sous-algèbre est nécessairement commutative.*

Supposons que l'algèbre A contienne une sous-algèbre S d'ordre 3 et du 3^{ème} degré : S contient l'élément unité e de A (corollaire 13). Choisissons un élément a qui soit un générateur de S et supposons que $[a]$ ne soit pas commutative. Alors pour tout inverse a' de a on a $a' \in [a]$ (cf. démonstration du théorème 69). Par suite a et a' engendrent A . Tout élément non nul $x = \xi_0e + \xi_1a$ admet un inverse bilatère $x' = \xi'_0e + \xi'_1a + \xi'_2a^2 + \xi'_3a'$. Le seul terme en a' du produit xx' est $\xi_0\xi'_3$. Par suite si $\xi_0 \neq 0$ alors $\xi'_3 = 0$. Puisque $xx' = x'x = 0$, il en résulte $\xi_1\xi'_2(aa^2 - a^2a) = 0$, donc pourvu que $\xi_0 \neq 0$ et $\xi_1 \neq 0$ on a $\xi'_2 = 0$ et par suite $x' \in (e, a)$, ce qui est impossible. Donc S est commutative.

Montrons de plus :

THÉOREME 73. — *Si une algèbre symétrique A d'ordre 5 sur un corps F non isomorphe au corps $(0, 1)$, contient une sous-algèbre du 3^{ème} ordre et du 3^{ème} degré, cette sous-algèbre est commutative.*

Choisissons un générateur a de la sous-algèbre supposée non commutative et soit $A = (e, a, a^2, a', e_4)$. A est définie par sa table de multiplication avec $e_0 = e, e_1 = a, e_2 = a^2, e_3 = a'$. Exprimons que tout élément $\xi_0e + \xi_1a \neq 0$ a un inverse bilatère de la forme $x' = \sum_{i=0}^4 \xi'_i e_i$. Les coefficients de a' et de b fournissent le système :

$$-\xi_0\xi'_3 = \gamma_{413}\xi_1\xi'_4 = \gamma_{143}\xi_1\xi'_4, \quad (\xi_0 + \gamma_{414}\xi_1)\xi'_4 = (\xi_0 + \gamma_{144}\xi_1)\xi'_4 = 0.$$

Choisissons ξ_0 et ξ_1 (non tous nuls) de façon que les égalités $\frac{\xi_0}{\gamma_{414}} = \frac{\xi_0}{\gamma_{144}} = \frac{\xi_1}{-1}$ (si $\gamma_{414}\gamma_{144} = 0$ il en résulte par convention $\xi_0 = 0$) ne soient pas toutes vérifiées et que, de plus, $\xi_0 \neq 0$. Ces choix sont toujours possibles. Alors le système en ξ'_3, ξ'_4 donne $\xi'_3 = \xi'_4 = 0$.

De $xx' = x'x = 0$ il résulte, pourvu que $\xi_1 \neq 0$: $\xi'_2 = 0$. [Le choix $\xi_1 \neq 0$ cumulé avec les deux premiers choix n'est toujours possible que si F n'est pas isomorphe au corps $(0, 1)$, sinon pour $\gamma_{414} = \gamma_{144} = 1$ et $\xi_0 \neq 0, \xi_1 \neq 0$ les trois fractions ci-dessus sont égales]. On a donc $x' \in (e, a)$, ce qui est impossible.

C. Q. F. D.

LEMME 15. — *Si une algèbre symétrique non commutative du 4^{ème} ordre, sur un corps F non isomorphe au corps $(0,1)$, contient une sous-algèbre S du 3^{ème} ordre et du 3^{ème} degré, alors tout inverse de tout élément de S appartient à S ; en particulier :*

1° S est symétrique ;

2° L'inverse de tout générateur de S est unique.

I. — Soit A l'algèbre donnée. Supposons qu'il existe dans S un élément a qui admette un inverse bilatère a' n'appartenant pas à S. On a $(A) = (S) + (a')$. Soit $(S) = (e, a, a_2)$. D'après la commutativité de S (lemme 14), il résulte de l'équation $xx' - x'x = 0$, avec les notations habituelles : $(\xi_2\xi_3 - \xi_3\xi_2)(a_2a' - a'a_2) = 0$. Par suite, il existe un élément λ $(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3) \in F$ tel que :

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi_2' = \lambda \xi_2, \\ \xi_3' = \lambda \xi_3, \end{array} \right.$$

sauf, peut-être, si $\xi_2 = \xi_3 = 0$.

II. — Si $S = [a]$, on peut poser $a_2 = a^2$ et on peut prendre pour A la base (e, a, a^2, a') . Faisons alors $\xi_0=0$, $\xi_1 \neq 0$, $\xi_2=0$, $\xi_3 \neq 0$ dans x . L'équation $xx' = e$, compte tenu des relations (2) et pour ces valeurs des ξ_i , donne $\lambda \neq 0$ et $\gamma_{331}\xi_3 = \gamma_{333}\xi_1$. Si F n'est pas isomorphe au corps $(0, 1)$ il en résulte $\gamma_{331} = \gamma_{333} = 0$. Faisons maintenant $\xi_0 \neq 0$, $\xi_2 = 0$, $\xi_3 \neq 0$ dans x . En tenant compte des deux relations précédentes, on obtient, pour ce choix des ξ_i $\lambda \neq 0$ et $\xi_1^2 + \gamma_{332}\xi_3 = 0$ quels que soient ξ_1 et $\xi_3 \neq 0$. C'est impossible. Donc tout inverse de a appartient à $[a]$ (et par suite a n'admet qu'un inverse — théorème 36).

III. — Si a n'est pas un générateur de S on a $a^2 \in (e, a)$. Prenons (e, a, a_2, a') comme base de A. Les relations (2) montrent que tout élément $\xi_0e + \xi_1a + \xi_2a_2$, avec $\xi_2 \neq 0$, n'a pas d'inverse extérieur à S. Avec les notations usuelles, on a :

$$a(a_2 - \lambda e) = \gamma_{120}e + (\gamma_{121} - \lambda)a + \gamma_{122}a_2, \quad (\lambda \in F).$$

On peut donc supposer $\gamma_{121} = 0$. De plus a n'ayant pas d'inverse dans S ni, à fortiori dans $[a]$, on a $\gamma_{110} = 0$. Posons :

$$\delta_{23i} = \gamma_{23i} + \gamma_{32i}, \quad (i = 0, 1, 2, 3).$$

En écrivant les conditions générales de symétrie (Chapitre XIII) et en tenant compte des relations (2) on trouve successivement :

$$\begin{aligned} \gamma_{111} &= \delta_{233} = \gamma_{333} = \gamma_{221} = \delta_{221} = \gamma_{331} = 0, \\ 2\gamma_{122} &= \gamma_{222} = \delta_{232} = \gamma_{332} = 0, \end{aligned}$$

et on en déduit, dans tous les cas, $\gamma_{122} = 0$ (sinon S serait du second degré). Enfin en écrivant que a n'a pas d'inverse dans S, il vient $\gamma_{120} = 0$. Il résulte de ces relations que a_2 n'a pas d'inverse (dans A).

C. Q. F. D

LEMME 16. — Si une algèbre A d'ordre 4, symétrique, non commutative, sur un corps F de caractéristique différente de 2, contient une sous-algèbre T du second ordre ayant un élément unité, cette sous-algèbre est un corps.

1° Si f est l'élément unité de T et e celui de A on a $f = e$.

Supposons qu'il n'en soit pas ainsi. Il en résulte $f \notin (e)$ sinon on aurait, a étant un élément de T, $a = fa = (\lambda e)a = \lambda a$ avec $\lambda \neq 1$, ce qui est impossible. On peut donc

choisir un élément b de A de façon que (e, f, a, b) soit une base de A . Tout x non nul de T admet un inverse bilatère x' dans A . Avec les notations habituelles, l'équation $xx' - x'x = 0$ entraîne :

$$\xi_3 [\xi_1 (fb - bf) + \xi_2 (ab - ba)] = 0 .$$

Supposons que pour un couple de valeurs de (ξ_1, ξ_2) on ait $\xi_3 = 0$, pour ce choix de ξ_1 et de ξ_2 , on aurait $x' \in (e, f, a)$. Mais alors il viendrait $xx' \in (f, a)$ d'où $xx' \neq e$. Donc quels que soient ξ_1 et ξ_2 on a $\xi_3 \neq 0$ et par suite $fb = bf$ et $ab = ba$: A est commutative contrairement à l'hypothèse.

2° Supposons T non symétrique : T contient donc un élément $a \notin (e)$ qui n'a pas d'inverse dans T . Prenons (e, a, a', b) comme base de A . L'équation $xx' - x'x = 0$ avec $x \in (e, a, a')$ entraîne comme précédemment :

$$\xi_3 [\xi_1 (ab - ba) + \xi_2 (a'b - ba')] = 0$$

quels que soient ξ_1 et ξ_2 . On a donc $\xi_3 = 0$, pour certaines valeurs $\xi_1 = \alpha_1, \xi_2 = \alpha_2$. On peut toujours supposer $\alpha_2 \neq 0$ car, ou bien $a'b = ba'$ et ξ_2 n'intervient pas, ou bien $a'b \neq ba'$ et en faisant $\xi_1 = 0$ et $\xi_2 \neq 0$ il en résulte $\xi_3 = 0$.

Soit $a'^2 = c + \gamma b$, [$c \in (e, a, a')$]. Faisons $\xi_1 = \alpha_1, \xi_2 = \alpha_2 \neq 0$. Alors dans xx' il n'y a qu'un terme en b : ce terme admet comme coefficient $\gamma \alpha_2 \xi_2'$. D'où $\gamma \xi_2' = 0$.

Si on avait $\xi_2' = 0$, il en résulterait (avec $a^2 = \beta a$) $\alpha_2 \xi_0' = 0$ d'où $\xi_0' = 0$ et $\alpha_2 \xi_1' = 1$, $(\xi_0 + \beta \alpha_1) \xi_1 = 0$, ce qui est impossible si on choisit $\xi_0 \neq -\beta \alpha_1$. Donc avec ce choix des ξ on a $\xi_2' \neq 0$ et par suite $\gamma = 0$.

Par suite (e, a, a') forme une sous-algèbre $U \subset A$. D'après le lemme 15, U est symétrique [F n'étant pas isomorphe au corps $(0, 1)$] et le théorème 71 montre que T est également symétrique (F n'étant pas de caractéristique 2). D'où une contradiction.

129. — Algèbres de degré 4 à droite.

D'après le lemme 13, ces algèbres pour être symétriques doivent être aussi de degré 4 à gauche (sinon elles seraient de degré 3 à gauche, donc de degré 3 à droite).

THÉORÈME 74. — Une algèbre A , symétrique, du 4^{ème} ordre et du 4^{ème} degré sur un corps de caractéristique différente de 2 est commutative. (Nous disons 4^{ème} degré pour 4^{ème} degré principal).

En effet, il existe un élément a de A tel que $(e, a, a^2, a^3) = A$. Choisissons a canonique (lemme 6) et exprimons que a possède un inverse $a' = \sum_{i=0}^3 \alpha_i a^i$, dans $a'a$ le seul terme en a^3 est α_2' qui est donc nul. De $aa' - a'a = 0$ il résulte ensuite $\alpha_3' (aa^3 - a^3a) = 0$. Si α_3' était nul on aurait $a (\alpha_0'e + \alpha_1'a) = e$, ce qui est impossible, donc $\alpha_3' \neq 0$ et $aa^3 = a^3a$.

Exprimons que $b = e + a$ a un inverse $b' = \sum_{i=0}^3 \beta_i a^i$. De $bb' - b'b = 0$ il résulte : $\beta_2' (aa^2 - a^2a) = 0$. Si on avait $\beta_2' = 0$, dans bb' le seul terme en a^3 serait β_3' et on aurait $\beta_3' = 0$. Mais alors on devrait avoir $(e + a) (\beta_0'e + \beta_1'a) = e$, ce qui est impossible. Donc $\beta_2' \neq 0$ et $aa^2 = a^2a$.

Exprimons enfin que l'élément général x a un inverse $x' = \sum_{i=0}^3 \xi_i a^i$. De $xx' - x'x = 0$ et d'après les relations de commutation déjà établies, on déduit $(\xi_2 \xi_3 - \xi_3 \xi_2) (a^2 a^3 - a^3 a^2) = 0$. Si on avait $a^2 a^3 \neq a^3 a^2$ il en résulterait $\xi_2' = \lambda \xi_2$, $\xi_3' = \lambda \xi_3$, ($\lambda \in F$), sauf, peut-être, si l'on a $\xi_2 = \xi_3 = 0$. Mais cette proportionnalité est impossible car pour $\xi_2 \neq 0$, $\xi_3 = 0$ il en résulterait $\xi_3' = 0$ et :

$$(\xi_0 e + \xi_1 a + \xi_2 a^2) (\xi_0' e + \xi_1' a + \xi_2' a^2) = e \dots$$

En faisant dans cette équation $\xi_0 = \xi_1 = 0$, $\xi_2 = 1$, puis $\xi_0 \neq 0$, $\xi_1 = 0$, $\xi_2 \neq 0$, on obtient $\gamma_{221} = 0$, puis $\gamma_{233} = 0$. L'élimination des ξ' donne alors, pourvu que $\xi_1 \xi_2 \neq 0$: $2 \xi_0 \xi_2 - \xi_1^2 + \gamma_{222} \xi_2^2 = 0$. Si F n'est pas isomorphe au corps $(0, 1)$ on peut toujours choisir les ξ de façon que $\xi_1 \xi_2 \neq 0$ et que cette égalité ne soit pas vérifiée. On a donc $a^2 a^3 = a^3 a^2$, ce qui complète la démonstration.

130. — Algèbres de degré 3.

Il résulte des lemmes 15 et 16 et du théorème 74 que l'on a :

THÉOREME 75. — *Une algèbre symétrique d'ordre 4, non commutative, sur un corps de caractéristique différente de 2, est proprement symétrique et de degré principal inférieur à 4.*

131. — Ainsi une algèbre symétrique d'ordre inférieur à 5 et de caractéristique différente de 2 appartient à l'une au moins des catégories suivantes :

1° *Algèbre commutative.*

2° *Algèbre à puissances associatives et du second degré (absolument symétrique).*

3° *Algèbre proprement symétrique d'ordre 4 et de degré 3 admettant une sous-algèbre d'ordre 3 et de degré 3 commutative et proprement symétrique. Si l'algèbre est réelle, cette catégorie est vide (théorème 70).*

132. — *Détermination de toutes les algèbres proprement symétriques réelles d'ordre inférieur à 5.*

THÉOREME 76. — *Les algèbres proprement symétriques réelles d'ordre inférieur à 5 sont, à un isomorphisme près, les algèbres P d'ordre inférieur à 5 (elles sont donc absolument symétriques).*

Il suffit (théorème 65) de montrer que les algèbres proprement symétriques d'ordre inférieur à 5 sont du second degré.

1° Il n'existe pas d'algèbres proprement symétriques réelles d'ordre 4 et de degré principal 4.

Supposons qu'il en existe une A . Cette algèbre serait commutative (théorème 73) et contiendrait un élément a tel que le module de A coïncide avec le module D_a des puissances principales de a . En particulier $a^2 a^2$ appartiendrait à D_a et par suite il existerait, dans le corps R des nombres réels, des nombres α_0, α_1 ; β_0, β_1 tels qu'on ait :

$$(3) \quad (a^2 + \alpha_0 a + \alpha_1 e) (a^2 + \beta_0 a + \beta_1) = 0.$$

Soit $b = a^2 + \alpha_0 a + \alpha_1 e$. Si l'on avait $D_b = D_a$, a et a^2 s'exprimeraient par une combinaison linéaire des b^i ($i < 4$) et l'équation (3) s'écrirait $bp(b) = 0$, $p(b)$ étant un polynôme du 3^{ème} degré en b , et b n'aurait pas d'inverse dans A (théorème 36). Par suite, on a nécessairement $b^3 \in (e, b, b^2)$. Si $b^2 b^2$ appartenait à D_b , ou bien $[b]$ formerait une sous-algèbre symétrique réelle du 3^{ème} ordre et du 3^{ème} degré, ce qui est impossible (théorème 70), ou bien on aurait $b^2 \in (e, b)$, mais il résulte alors de l'équation (3) et du fait que a est de degré principal 4 que cette appartenance se réduit à $b^2 = (b)$ ce qui est également impossible car b n'aurait pas d'inverse dans $[b]$. Il faut donc que b engendre A , donc tout élément c tel que $c = b + \lambda e$ ($\lambda \in R$) engendre également A . Choisissons λ de telle sorte qu'on ait $c^3 \in (e, c^2)$, c'est toujours possible car une telle valeur de λ est déterminée par une équation du 3^{ème} degré. Tout inverse c' de c appartient alors à $(e, c, c^2, c^2 c^2)$ sans appartenir à (e, c, c^2) . Par suite $(c^2 c^2) c$ appartient à (e, c, c^2) . Mais il en résulte, si δ_0 et θ_0 désignent respectivement les coefficients de e dans les produits $(c^2 c^2) c$ et $(c^2 c^2) c^2$ rapportés à la base $(e, c, c^2, c^2 c^2)$, que les éléments dont les coordonnées (dans cette même base) satisfont aux relations $\xi_0 = \delta_0 \xi_1 + \theta_0 \xi_2 = \xi_3 = 0$ n'ont pas d'inverse dans A . Donc A n'existe pas.

2^o Il n'existe pas d'algèbres proprement symétriques réelles d'ordre 4 et de degré 3.

En effet, s'il en existait une, elle serait commutative (§ 131) donc à puissances quasi-associatives (théorème 26, 2^o), ce qui est impossible (corollaire 20).

3^o Rappelons que d'après le théorème 70 il n'existe pas d'algèbres symétriques réelles d'ordre 3 et de degré 3.

La même méthode appliquée aux algèbres (proprement symétriques réelles) d'ordre inférieur à 6 ne permet pas d'exclure, a priori, les algèbres d'ordre 5 et de degré principal 4.

133. — Détermination de toutes les algèbres monosymétriques réelles d'ordre inférieur à 5.

LEMME 17. — Toute algèbre monosymétrique réelle d'ordre inférieur à 5 est isomorphe à une algèbre P .

En effet (§ 131), une telle algèbre est soit du second degré, soit commutative, et dans ces deux cas (schéma II, § 110) elle est proprement symétrique (cf. théorème 76).

En appelant $\{e, e_i\}$ une base de l'algèbre, on a :

THÉORÈME 77. — Les algèbres monosymétriques réelles d'ordre n inférieur à 5 sont, à un isomorphisme près, les nombres réels, les nombres complexes, les algèbres P d'ordre 3 telles que $e_1 e_2$ ne soit pas nul et les algèbres P d'ordre 4 telles que l'espace $(\{e_i e_j\})$ ($i \neq j$) soit à 3 dimensions.

Le théorème est évident pour $n < 3$.

Pour $n = 3$ et $n = 4$ nous utilisons le lemme 12 :

1^o Cas $n = 3$. L'équation (2) — § 122 — s'écrit :

$$(\xi_1 \theta_2 - \xi_2 \theta_1) e_1 e_2 = 0,$$

pour qu'il en résulte $\overrightarrow{\{\theta_1, \theta_2\}} = \rho \overrightarrow{\{\xi_1, \xi_2\}}$, ($\rho \in R$), pour tout $\overrightarrow{\{\xi_1, \xi_2\}} \neq 0$, il faut et il suffit que $e_1 e_2 \neq 0$.

2° Cas $n = 4$. L'équation (2) — § 122 — devient :

$$(\xi_1\theta_2 - \xi_2\theta_1) e_1e_2 + (\xi_1\theta_3 - \xi_3\theta_1) e_1e_3 + (\xi_2\theta_3 - \xi_3\theta_2) e_2e_3 = 0 ,$$

pour qu'il en résulte la colinéarité des vecteurs (ξ_i) et (θ_i) pour tout $(\xi_i) \neq 0$ il faut et il suffit que cette équation implique la nullité des trois parenthèses, autrement dit il faut et il suffit que e_1e_2, e_1e_3, e_2e_3 soient linéairement indépendants sur R.

Exemples. — L'algèbre IX, l'algèbre P définie par $e_1e_2 = e_1, e_1e_3 = -e_3, e_2e_3 = e_2$ sont des algèbres monosymétriques, d'ordre 3 et d'ordre 4, qui ne sont pas des algèbres à division.

D'après la démonstration du théorème 77 et le fait que le lemme 12 est valable pour un corps réel quelconque, on a aussi :

THÉORÈME 78. — *Les algèbres monosymétriques de la forme P et d'ordre inférieur à 5 sur un corps réel K sont isomorphes aux algèbres P énumérées (dans le cas où $K = R$) par le théorème 77.*

134. — *Algèbres réelles, symétriques à division, d'ordre inférieur à 8.*

D'après un résultat de STIEFEL ({30} et {7}, p. 589), l'ordre d'une algèbre réelle à division est une puissance de 2, les algèbres cherchées sont donc d'ordre 1, 2 ou 4.

Une algèbre symétrique à division étant monosymétrique, les algèbres cherchées D font partie des algèbres déterminées par le théorème 77, en particulier *elles sont du second degré* (1) et sont isomorphes à des algèbres P.

Les algèbres D d'ordre 1 et d'ordre 2 sont les nombres réels et les nombres complexes (à un isomorphisme près). Les algèbres D d'ordre 4 coïncident avec les algèbres réelles à division d'ordre 4 et de degré 2 : ces algèbres ont été déterminées par DICKSON ({15}, théorème 2).

135. — *Exemples.*

Des exemples sont donnés par les algèbres :

TABLE XV

e	e_1	e_2	e_3
e_1	$-e$	e_3	$\mu e + \alpha e_1 - \beta^2 e_2$
e_2	$-e_3$	$-e$	$\nu e + \gamma^2 e_1 + \alpha e_2$
e_3	$-\mu e - \alpha e_1 + \beta^2 e_2$	$-\nu e - \gamma^2 e_1 - \alpha e_2$	$-e$

pour $\alpha, \beta, \gamma, \mu, \nu$ quelconques dans R sauf $\beta\gamma \neq 0$.

En effet, on a alors (cf. § 116 et théorème 65, 2°) :

$$Q(x) = (\xi_0 + \alpha\xi_3)^2 + \beta^2\xi_1^2 + \gamma^2\xi_2^2 + \beta^2\gamma^2\xi_3^2 .$$

Pour que ces algèbres soient alternatives, il faut qu'on ait $\alpha = \mu = \nu = 0, \beta^2 = \gamma^2 = 1$ et cela suffit car on obtient les quaternions.

(1) Si l'ordre est au moins égal à 2.

PROBLÈMES NON RÉSOLUS

Ce travail soulève deux problèmes importants qui n'ont été résolus ici que dans des cas très particuliers.

1° *Dans quelles conditions une algèbre (non associative) du $n^{\text{ème}}$ degré est-elle algébrique ?*

Nous avons vu que les algèbres à cubes uniques telles que la division par 2 soit toujours possible dans B et pour $n < 5$ sont algébriques (théorèmes 22 et 23, corollaire 11).

2° *Dans quels cas une algèbre (non associative) ayant des diviseurs de zéro peut-elle être immergée dans une algèbre symétrique ou monosymétrique ?*

Nous avons donné un exemple (§ 106). Dans le second cas, il faut évidemment que l'algèbre ne contienne pas de diviseurs bilatères de zéro (cf. lemme 14 et théorème 73). En ce qui concerne le problème plus général de l'immersion dans une algèbre où tout élément est inversible unilatéralement (§ 65) nous avons donné des exemples (§ 119, immersion des nombres duaux dans l'algèbre $[e, e_1, e_2]$ et dans l'algèbre $[e, e_1, e_2, e_3]$).

TABLE DES DÉFINITIONS ET SIGNES PRINCIPAUX EMPLOYÉS

DÉFINITIONS

	§
ALGÈBRES	
absolument symétriques	104
algébriques	43
de degrés finis	45
de degré principal fini.	45
du $p^{\text{ème}}$ degré.	45
monosymétriques	96
non associatives.	1
P	121
proprement symétriques	104
sans diviseurs bilatères de zéro.	99
symétriques.	90
symétriques à division.	101
 ANNEAUX	
à cubes uniques.	11
alternatifs.	12
à puissances associatives.	11
à puissances commutatives.	12
à puissances flexibles	12
à puissances principales commutatives.	12
à puissances principales uniques.	11
à puissances quasi-associatives.	11
flexibles	12
monogènes	7
non associatifs	1
réguliers	91
Base canonique	52
Commutateur	13
Conjugué (d'un élément).	121
Degré d'une puissance.	5
Degré d'un commutateur.	13
Diviseurs de zéro	67

ELÉMENT

canonique.	44
de degré n , du n^{me} degré	44
inversible	65
unité bilatère	3

EQUATIONS

caractéristiques	39
minima.	39, 44
principales	39, 45

INVERSE

absolu	84
à gauche, à droite, bilatère	65, 66
impropre	84
propre	84

Linéarisation	18, 50
Longueur d'une puissance	6
Longueur d'un commutateur.	13
Module des puissances à droite.	10
Ordination naturelle (des puissances)	6
Orthogonaux (éléments)	67
Partie imaginaire (d'un élément)	121
Partitions commutatives complètes.. . . .	22

PUISSANCES

mixtes.	5
négatives.	80
pleines.	46
principales	5

Réciproque (inverse absolu)	84
---------------------------------------	----

SIGNES SPÉCIAUX

	§		§
a^n	5	$*$	15
$[x, y]$	7	a' (inverse bilatère de a).	66
$([x])$	9	a'^n	80
D_a, G_a	10	a^{-1} (inverse propre de a)	84
$[ab]$	13	a_r^{-1} (réciproque de a)	84
$S_a(x_1, \dots, x_n)$	15	$\delta_x, x, \dots, \delta'_x, y, \dots$	38, 45 et 50
$v(n)$	15		

BIBLIOGRAPHIE

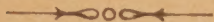
1. ALBERT (A.-A.). — « On a certain algebra of quantum mechanics », *Ann. of Math.*, vol. 35 (1934), p. 65.
2. ALBERT (A.-A.). — *Modern Higher Algebra*, Chicago, 1937.
3. ALBERT (A.-A.). — *Structure of Algebras*, New-York, 1939.
4. ALBERT (A.-A.). — « Non associative Algebras », *Ann. of Math.*, vol. 43 (1942), p. 685.
5. ALBERT (A.-A.). — « Algebras derived by non associative matrix multiplication », *Am. J. of Math.*, vol. 64 (1944), p. 30.
6. ALBERT (A.-A.). — « Absolute valued real Algebras », *Ann. of Math.*, vol. 48 (1947), p. 495.
7. ALBERT (A.-A.). — « Power-associative rings », *Trans. of the Am. Math. Soc.*, vol. 64 (1948), p. 552.
8. ALBERT (A.-A.). — « On Right Alternative Algebras », *Ann. of Math.*, vol. 50 (1949), p. 318.
9. ALBERT (A.-A.). — « Absolute valued Algebraic Algebras », *Bull. of the Am. Math. Soc.*, vol. 55 (1949), p. 763.
10. BOURBAKI (N.). — *Algèbre*, Paris (1942... 1950).
11. CAYLEY (A.). — *London. Edinburgh. Dublin philos. mag.*, vol. 26 (1845), p. 210 ; vol. 30 (1847), p. 257.
12. CAYLEY (A.). — « On the Theory of the Analytical Forms called Trees », *Phil. mag.*, XIII (1857), p. 172.
13. CHATELET (A.). — *Eléments d'Algèbre*, Paris (1947).
14. DICKSON (L.-E.). — « Linear Algebras », *Trans. of the Am. Math. Soc.*, vol. 13 (1912), p. 59.
15. DICKSON (L.-E.). — « Linear Algebras with associativity not assumed », *Duke Math. J.*, vol. 1 (1935), p. 113.
16. DUBREIL (P.). — *Algèbre*, tome I, Paris (1946).
17. ETHERINGTON (I.-M.-H.). — « On non associative combinations » (*Proc. of the Royal Soc. of Edinburgh*, vol. 59 (1939), p. 153.
18. ETHERINGTON (I.-M.-H.). — « Genetic Algebras », *Proc. of the Royal Soc. of Edinburgh*, vol. 59 (1939), p. 242.
19. ETHERINGTON (I.-M.-H.). — « Non associative Arithmetics », *Proc. of the Royal Soc. of Edinburgh*, vol. 62 (1947-1949), A, Part IV, p. 442.
20. JACOBSON (N.). — « Structure theory for algebraic algebras of bounded degree », *Ann. of Math.*, vol. 46 (1945), p. 695.

21. JACOBSON (N.). — « Lie and Jordan Triple Systems », *Am. J. of Math.*, vol. 71 (1949), p. 149.
22. JORDAN (P.), NEUMANN (J. VON), WIGNER (E.). — « On an algebraic generalization of the quantum mechanical formalism », *Ann. of Math.*, vol. 35 (1934), p. 29.
23. JULIA (G.). — *Introduction mathématique aux théories quantiques*. Deuxième partie, Paris (1938).
24. KAPLANSKY (I.). — « Rings with a polynomial identity », *Bull. of the Am. Math. Soc.*, vol. 54 (1948), p. 575.
25. LEVITZKI (J.). — « A theorem on polynomial identities », *Proc. of the Am. Math. Soc.*, vol. 1 (1950), p. 334.
26. REES (D.). — « The Nuclei non associative division Algebra », *Proc. of the Cambridge Phil. Soc.*, vol. 46 (1950), part. 1, p. 1.
27. SHAFER (R.-D.). — « Structure of genetic algebras », *Am. J. of Math.*, vol. 71 (1949), p. 121.
28. SMILEY (M.-F.). — « Alternative regular rings without nilpotent elements », *Bull. of the Am. Math. Soc.*, vol. 53 (1947), p. 775.
29. SMILEY (M.-F.). — « The Radical of an Alternative Ring », *Ann. of Math.*, vol. 49 (1948), p. 702.
30. STIEFEL (E.). — « Über Richtungsfelder in den projektiven Räumen und einen Satz aus der reellen Algebra », *Com. Math. Helvetici*, vol. 13 (1940-41), p. 217.
31. VON NEUMANN (J.). — « On Regular Rings », *Proc. Nat. Acad. Sc. U.S.A.*, vol. 22 (1936), p. 707.
32. ZORN (M.). — « Theorie der Alternative Ringe », *Hamburg Abh.*, vol. 8 (1930), p. 123.

CORRESPONDANCE ENTRE LES N^{os} DES PAGES ET LES N^{os} DES PARAGRAPHES

Paragrapbes	Pages	Paragrapbes	Pages	Paragrapbes	Pages	Paragrapbes	Pages
1	13	35	43	69	73	103	90
2	13	36	44	70	74	104	91
3	14	37	45	71	74	105	92
4	14	38	45	72	74	106	92
5	15	39	47	73	75	107	93
6	16	40	50	74	75	108	93
7	16	41	50	75	76	109	94
8	17	42	51	76	77	110	94
9	17	43	51	77	77	111	95
10	17	44	51	78	78	112	96
11	17	45	52	79	79	113	96
12	18	46	53	80	80	114	98
13	18	47	54	81	80	115	98
14	20	48	54	82	80	116	98
15	21	49	54	83	80	117	98
16	21	50	55	84	81	118	99
17	23	51	59	85	82	119	99
18	23	52	59	86	83	120	100
19	24	53	61	87	83	121	100
20	24	54	62	88	84	122	101
21	24	55	63	89	84	123	102
22	25	56	63	90	85	124	102
23	25	57	64	91	85	125	102
24	25	58	64	92	85	126	103
25	26	59	64	93	86	127	104
26	28	60	66	94	87	128	106
27	30	61	67	95	87	129	109
28	31	62	68	96	87	130	110
29	32	63	68	97	87	131	110
30	32	64	68	98	88	132	110
31	33	65	71	99	89	133	111
32	34	66	71	100	90	134	112
33	35	67	72	101	90	135	112
34	37	68	72	102	90		

DEUXIEME THESE



Propositions données par la Faculté



La différentielle absolue dans un espace de Riemann.

Vu et approuvé :

Paris, le 25 Mai 1951.

Le Doyen de la Faculté des Sciences.

A. CHATELET.

Vu et permis d'imprimer :

Le Recteur de l'Académie de Paris,

Le Vice-Président du Conseil
de l'Université.

FABRE.

imprimé sur les presses de la
Grande Imprimerie Africaine
6, rue Carnot - DAKAR
sous le numéro 1750-4-55
